

Министерство образования и науки Российской Федерации
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

«ИВАНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ В.И. ЛЕНИНА»

А.Н. ГОЛУБЕВ, В.А. МАРТЫНОВ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

Учебное пособие
для студентов факультета заочного обучения

Иваново 2011

УДК 621.3

Г 62

Голубев А.Н., Мартынов В.А. Теоретические основы электротехники: Учеб. пособие для студентов факультета заочного обучения / ГОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина». Иваново, 2011. – 140 с.

ISBN

В учебном пособии приводятся контрольные работы по курсу ТОЭ (часть 2) и методические указания по их выполнению, а также необходимые теоретические сведения по соответствующим разделам дисциплины. В зависимости от профиля специальности и степени подготовленности студентов предусмотрена возможность формирования заданий разного уровня сложности.

Содержание контрольных работ ориентировано на студентов всех специальностей электротехнического и электромеханического профилей

Табл. 27. Ил. 191. Библиогр. 12 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета ГОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»

Научный редактор

доктор технических наук Б.С. КУРНЫШЕВ

Рецензенты:

А.Ф. СОРОКИН; М.Г. МАРКОВ (ГОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»)

ГОЛУБЕВ Александр Николаевич
МАРТЫНОВ Владимир Александрович

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ
Учебное пособие для студентов факультета заочного обучения

Редактор Н.С. Работаева

Подписано в печать

Формат 60x84 1/16.

Печать плоская. Усл. печ. л. 8,13. Уч.-изд. л. 9,2.

Тираж 250 экз. Заказ №

ГОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина»

153003, г. Иваново, ул. Рабфаковская, 34.

Отпечатано в УИУНЛ ИГЭУ

ISBN

© А.Н. ГОЛУБЕВ, В.А. МАРТЫНОВ, 2011

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данное учебное пособие предназначено для самостоятельного изучения основных разделов курса ТОЭ (часть 2):

- переходные процессы в линейных электрических цепях;
- установившиеся и переходные процессы в цепях с распределенными параметрами;
- нелинейные электрические и магнитные цепи при постоянных токах и магнитных потоках;
- нелинейные электрические цепи при переменных токах и магнитных потоках.

Пособие включает в себя варианты контрольных заданий по указанным разделам дисциплины, методические указания по их выполнению, а также необходимые теоретические сведения. Содержание пособия, последовательность изложения материала в нем, а также объем задания к контрольным работам в целом соответствуют программе курса ТОЭ для электротехнических специальностей вузов.

Цель, которая стояла перед авторами при написании данного пособия, заключалась в том, чтобы дать студентам необходимый уровень знаний об электрических и магнитных цепях, основных методах анализа и расчета этих цепей в статических и динамических режимах работы, т.е. в создании базы для последующего изучения различных специальных электротехнических дисциплин. В результате изучения курса студент должен знать основные методы расчета переходных процессов в линейных цепях с сосредоточенными и распределенными параметрами, основные методы анализа и расчета установившихся процессов в нелинейных электрических и магнитных цепях при постоянных и переменных токах и магнитных потоках и уметь применять их на практике. Необходимый теоретический материал изложен сжато с использованием его табличного представления, что придает пособию элементы справочной литературы. Каждое контрольное задание сопровождается формулированием основных этапов его выполнения и разбором решения соответствующих задач.

При изучении дисциплины предполагается, что студент имеет соответствующую математическую подготовку в области дифференциального и интегрального исчисления, линейной и нелинейной алгебры, комплексных чисел и тригонометрических функций, а также знаком с основными понятиями и законами электричества и магнетизма, рассматриваемыми в курсе физики.

Знания и навыки, полученные при прочтении данного учебного пособия, а также при выполнении расчетных заданий, являются базой для освоения таких дисциплин, как «Теория автоматического управления», «Переходные процессы в электрических системах», «Электропривод», «Промышленная электроника» и т.д.

*Список рекомендуемой учебно-методической литературы
по дисциплине*

1. **Бессонов, Лев Алексеевич.** Теоретические основы электротехники: Электрические цепи: учеб. для студ. электротехн., энерг. и приборостроит. спец. вузов. / Л.А.Бессонов. –7-е изд., перераб. и доп. –М.: Высш. шк., 1978. –528 с.
2. **Основы** теории цепей: учеб. для вузов / Г.В.Зевеке [и др.]. –5-е изд., перераб. –М.: Энергоатомиздат, 1989. –528 с.
3. **Поливанов, Константин Михайлович.** Теоретические основы электротехники: учеб. для вузов. В 3 т. Т. 1. Линейные электрические цепи с сосредоточенными постоянными / К.М.Поливанов. –М.: Энергия, 1972. –240 с.
4. **Теоретические** основы электротехники: учеб. для вузов. В 3 т. Т. 2. Линейные электрические цепи (продолжение). Нелинейные цепи / Б.Я.Жуховицкий, И.Б.Негневицкий. –М.: Энергия, 1972. –200 с.
5. **Матханов, Платон Николаевич.** Основы анализа электрических цепей. Линейные цепи: учеб. для электротехн. и радиотехн. спец. вузов / П.Н.Матханов. –3-е изд., перераб. и доп. –М.: Высш. шк., 1990. –400 с.
6. **Матханов, Платон Николаевич.** Основы анализа электрических цепей. Нелинейные цепи: учеб. для электротехн. спец. вузов / П.Н.Матханов. –2-е изд., перераб. и доп. –М.: Высш. шк., 1986. –352 с.
7. **Каплянский, Александр Евсеевич.** Теоретические основы электротехники: учеб. пособие для электротехн. и энерг. спец. вузов / А.Е.Каплянский, А.П.Лысенко, Л.С.Полотовский. –Изд. 2-е. –М.: Высш. шк., 1972. – 448 с.
8. **Теоретические** основы электротехники. В 2 т. Т. 1. Основы теории линейных цепей: учеб. для электротехн. вузов / П.А.Ионкин [и др.]; под ред. П.А. Ионкина. –Изд. 2-е, перераб. и доп. –М.: Высш. шк., 1976. –544 с.
9. **Теоретические** основы электротехники. В 2 т. Т. 2. Нелинейные цепи и основы теории электромагнитного поля: учеб. для электротехн. вузов / П.А.Ионкин [и др.]; под ред. П.А.Ионкина. –Изд. 2-е, перераб. и доп. –М.: Высш. шк., 1976. –383 с.
10. **Голубев, Александр Николаевич.** Переходные процессы в линейных электрических цепях: учеб. пособие / А.Н.Голубев, В.А.Мартынов; ГОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина». –Иваново, 2008. –196 с.
11. **Голубев, Александр Николаевич.** Методы расчета нелинейных цепей: учеб. пособие / А.Н.Голубев; Иван. гос. энерг. ун-т. –Иваново, 2002. –212 с.
12. **Голубев, Александр Николаевич.** Теория линейных и нелинейных цепей: курс лекций. –2-е изд., перераб. и доп. / А.Н.Голубев; ГОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина». –Изд. 2-е, перераб. и доп. –Иваново, 2007. –348 с.

Авторы выражают глубокую благодарность программисту Н.Н. Дыдыкиной за активную и добросовестную работу при подготовке рукописи к печати.

УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Во всех заданиях выбор варианта осуществляется по двум последним цифрам шифра. При выполнении заданий и оформлении полученных решений необходимо придерживаться следующих правил:

1. Текст задания должен быть переписан полностью со всеми рисунками и числовыми значениями параметров своего варианта.

2. Решения задач должны сопровождаться объяснениями. При использовании готовых формул необходимо дать ссылку на соответствующую страницу учебника или учебного пособия. Необходимо приводить все основные этапы вычислений.

3. При записи формул уравнений, оформлении графиков, вычерчивании схем следует применять стандартные обозначения величин, единиц измерений, элементов схем. При вычислениях необходимо пользоваться системой единиц СИ. После каждого числового результата необходимо указывать единицу измерения.

4. Графики и диаграммы необходимо выполнять на миллиметровой бумаге с указанием отложенных на осях величин и единиц их измерения.

ЗАДАНИЕ 1. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Задание 1 имеет два уровня сложности. **Первый уровень** включает в себя две задачи по расчету переходных процессов в цепи с двумя накопителями энергии: 1.1 – классическим или операторным методом расчета (задача 1.1); 1.2 – методом переменных состояния (задача 1.2). **Второму уровню** соответствует задача по расчету переходных процессов в цепи с одним накопителем энергии классическим методом (задача 1.3).

Задача 1.1. *Задана электрическая цепь, в которой происходит коммутация (рис. 1.1 ÷ 1.20). В цепи действует постоянная ЭДС E . По данным, помещенным в табл. 1.1, необходимо:*

1) *рассчитать классическим или операторным методом зависимости напряжения на конденсаторе и токов в ветвях с катушкой индуктивности и резистором R , отмеченным в заданной схеме, в функции времени;*

2) *построить график найденных зависимостей.*

Примечание: при вычерчивании схемы цепи необходимо провести нумерацию ее элементов и задать положительные направления токов в ветвях.

Задача 1.2. *Задана электрическая цепь, в которой происходит коммутация (рис. 1.1 ÷ 1.20). В цепи действует синусоидально изменяющаяся ЭДС $e(t) = \sqrt{2}E \sin(2\pi ft + \Psi)$. По данным, помещенным в табл. 1.1, выполнить следующее:*

- 1) записать уравнения состояния цепи в матричной форме;
- 2) вычислить элементы матриц $[A]$, $[B]$, $[C]$, $[D]$, $[X(0)]$ и $[U]$, если искомыми величинами являются напряжение на конденсаторе и токи в ветвях с катушкой индуктивности и резистором R , отмеченным в заданной схеме.

Задача 1.3. Задана электрическая цепь, в которой происходит коммутация (рис.1.21÷ 1.40). В цепи действует синусоидально изменяющееся напряжение $u(t) = U_m \sin(314t + \Psi)$. По данным, помещенным в табл. 1.2, выполнить следующее:

- 1) рассчитать зависимость указанной в табл. 1.2 переменной в функции времени;
- 2) построить график найденной зависимости.

Таблица 1.1. Значения параметров электрических цепей к задачам 1.1÷1.2

Номер варианта	Номер рисунка	R2 , Ом	R3=R5, Ом	R1=R4, Ом	L , Гн	C , мкФ	E , В	f , Гц	Ψ , рад
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1.1	20	50	130	1.4	100	100	50	$\pi/6$
2	1.2	30	60	120	1.3	80	120	55	$\pi/4$
3	1.3	40	70	110	1.2	60	150	60	$\pi/3$
4	1.4	50	80	100	1.0	40	200	65	$\pi/2$
5	1.5	60	120	90	0.9	20	240	70	$-\pi/6$
6	1.6	70	160	80	0.7	30	300	75	$-\pi/4$
7	1.7	80	200	70	0.6	50	320	80	$-\pi/3$
8	1.8	90	220	60	0.5	70	400	85	$-\pi/3$
9	1.9	100	240	50	0.4	90	450	90	$\pi/6$
10	1.10	110	280	70	0.7	100	350	95	$\pi/4$
11	1.11	120	320	80	0.8	120	280	100	$\pi/3$
12	1.12	130	300	90	0.5	140	250	50	$\pi/2$
13	1.13	95	236	100	1.0	160	200	55	$-\pi/6$
14	1.14	85	190	110	1.1	140	180	60	$-\pi/4$
15	1.15	75	170	120	1.2	130	160	65	$-\pi/3$
16	1.16	65	150	130	1.35	110	150	70	$-\pi/2$
17	1.17	55	140	140	1.15	80	140	75	$\pi/6$
18	1.18	45	130	150	1.25	90	130	80	$\pi/4$
19	1.19	20	50	130	1.4	100	100	85	$\pi/3$
20	1.20	30	60	120	1.3	80	120	90	$\pi/2$
21	1.1	40	70	110	1.2	60	150	95	$-\pi/6$
22	1.2	50	80	100	1.0	40	200	100	$-\pi/4$
23	1.3	60	120	90	0.9	20	240	50	$-\pi/3$
24	1.4	70	160	80	0.7	30	300	55	$-\pi/2$
25	1.5	80	200	70	0.6	50	320	60	$\pi/6$
26	1.6	90	220	60	0.5	70	400	65	$\pi/4$
27	1.7	100	240	50	0.4	90	450	70	$\pi/3$
28	1.8	110	280	70	0.7	100	350	75	$\pi/2$
29	1.9	120	320	80	0.8	120	280	80	$-\pi/6$

Продолжение табл. 1.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
30	1.10	130	300	90	0.9	140	250	85	$-\pi/4$
31	1.11	95	230	100	0.1	160	200	90	$-\pi/3$
32	1.12	85	190	110	1.1	140	180	95	$-\pi/2$
33	1.13	75	170	120	1.2	130	160	100	$\pi/6$
34	1.14	65	150	130	1.35	110	150	50	$\pi/4$
35	1.15	55	140	140	1.15	80	140	55	$\pi/3$
36	1.16	45	130	150	1.15	90	130	60	$\pi/2$
37	1.17	20	50	130	1.4	100	100	65	$-\pi/6$
38	1.18	30	60	120	1.3	80	120	70	$-\pi/4$
39	1.19	40	70	110	1.2	60	150	75	$-\pi/3$
40	1.20	50	80	100	1.0	40	200	80	$-\pi/2$
41	1.1	60	120	90	0.9	20	246	85	$\pi/6$
42	1.2	70	160	80	0.7	30	300	90	$\pi/4$
43	1.3	80	200	70	0.6	50	320	95	$\pi/3$
44	1.4	90	220	60	0.5	70	400	100	$\pi/2$
45	1.5	100	240	50	0.4	90	450	50	$-\pi/6$
46	1.6	110	280	70	0.7	100	350	55	$-\pi/4$
47	1.7	120	320	80	0.8	120	280	60	$-\pi/3$
48	1.8	130	300	90	0.9	140	250	65	$-\pi/2$
49	1.9	95	230	100	1.0	160	200	70	$\pi/6$
50	1.10	85	190	110	1.1	140	180	75	$\pi/4$
51	1.11	75	170	120	1.2	130	160	80	$\pi/3$
52	1.12	65	150	130	1.35	110	150	85	$\pi/2$
53	1.13	55	140	140	1.15	80	140	90	$-\pi/6$
54	1.14	45	130	150	1.25	90	130	95	$-\pi/4$
55	1.15	20	50	130	1.4	100	100	100	$-\pi/3$
56	1.16	30	60	120	1.3	80	120	50	$-\pi/2$
57	1.17	40	70	110	1.2	60	150	55	$\pi/6$
58	1.18	50	80	100	1.0	40	200	60	$\pi/4$
59	1.19	60	120	90	0.9	20	240	65	$\pi/3$
60	1.20	70	160	80	0.7	30	300	70	$\pi/2$
61	1.1	80	200	70	0.6	50	320	70	$-\pi/6$
62	1.2	90	220	60	0.5	70	400	75	$-\pi/4$
63	1.3	100	240	50	0.4	90	450	80	$-\pi/3$
64	1.4	110	280	70	0.7	100	350	85	$-\pi/2$
65	1.5	120	320	80	0.8	120	280	90	$\pi/6$
66	1.6	130	300	90	0.9	140	250	95	$\pi/4$
67	1.7	95	230	100	1.0	160	200	100	$\pi/3$
68	1.8	85	190	110	1.1	140	180	50	$\pi/2$
69	1.9	75	170	120	1.2	130	160	55	$-\pi/6$
70	1.10	65	150	130	1.35	110	150	60	$-\pi/4$
71	1.11	55	140	140	1.15	80	140	65	$-\pi/3$
72	1.12	45	130	150	1.25	90	130	70	$-\pi/2$
73	1.13	20	50	130	1.4	100	100	75	$\pi/6$
74	1.14	30	60	120	1.3	80	120	80	$\pi/4$
75	1.15	40	70	110	1.2	60	150	85	$\pi/3$
76	1.16	50	80	100	1.0	40	200	90	$\pi/2$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
77	1.17	60	120	90	0.9	20	240	95	$-\pi/6$
78	1.18	70	160	80	0.7	30	300	100	$-\pi/4$
79	1.19	80	200	70	0.6	50	320	50	$-\pi/3$
80	1.20	90	220	60	0.5	70	400	55	$-\pi/2$
81	1.1	100	240	50	0.4	90	450	60	$\pi/6$
82	1.2	110	280	70	0.7	100	350	65	$\pi/4$
83	1.3	120	320	80	0.8	120	280	70	$\pi/3$
84	1.4	130	300	90	0.9	140	250	75	$\pi/2$
85	1.5	95	230	100	1.0	160	200	80	$-\pi/6$
86	1.6	85	190	110	1.1	140	180	85	$-\pi/4$
87	1.7	75	170	120	1.2	130	160	90	$-\pi/3$
88	1.8	65	150	130	1.35	110	150	95	$-\pi/2$
89	1.9	55	140	140	1.15	80	140	100	$\pi/6$
90	1.10	45	130	150	1.25	90	130	50	$\pi/4$
91	1.11	20	50	130	1.4	100	100	55	$\pi/3$
92	1.12	30	60	120	1.3	80	120	60	$\pi/2$
93	1.13	40	70	110	1.2	60	150	65	$-\pi/6$
94	1.14	50	80	100	1.0	40	200	70	$-\pi/4$
95	1.15	60	120	90	0.9	20	240	75	$-\pi/3$
96	1.16	70	160	80	0.7	30	300	80	$-\pi/2$
97	1.17	80	200	70	0.6	50	320	85	$\pi/6$
98	1.18	90	220	60	0.5	70	400	90	$\pi/4$
99	1.19	100	240	50	0.4	90	450	95	$\pi/3$
100	1.20	110	280	70	0.7	100	350	100	$\pi/2$

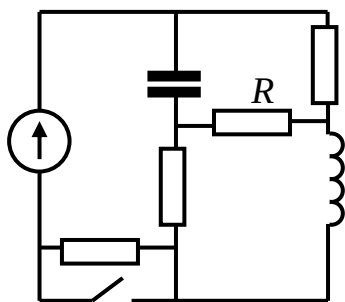


Рис. 1.1

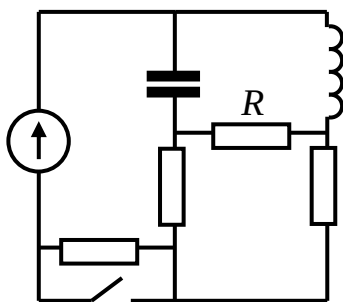


Рис. 1.2

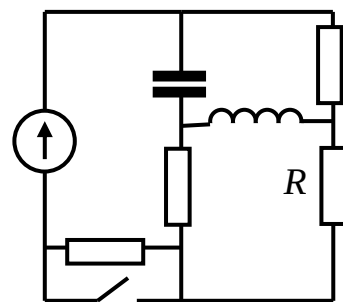


Рис. 1.3

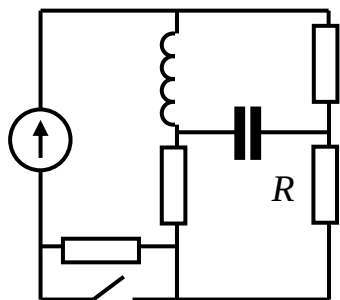


Рис. 1.4

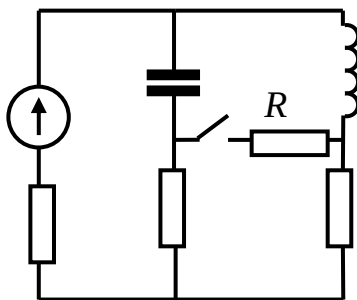


Рис. 1.5

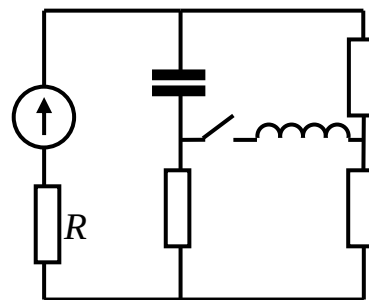
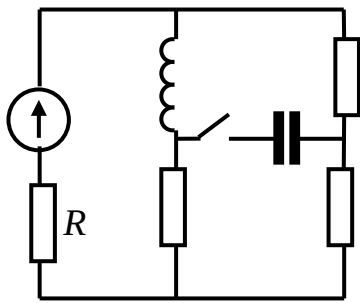
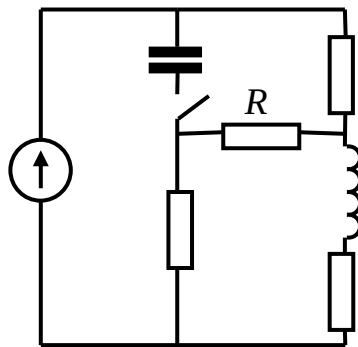


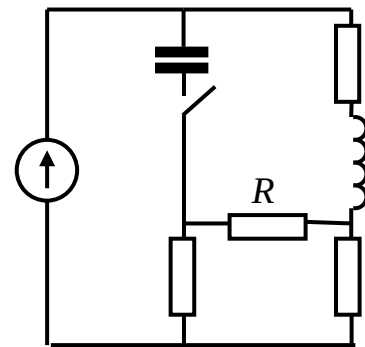
Рис. 1.6



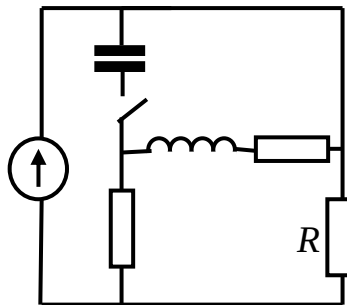
Puc. 1.7



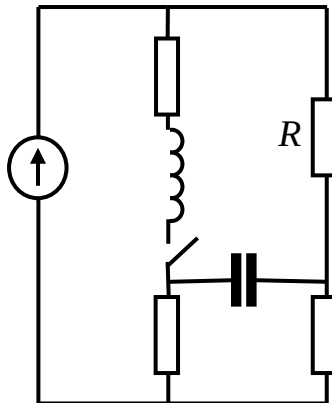
Puc. 1.8



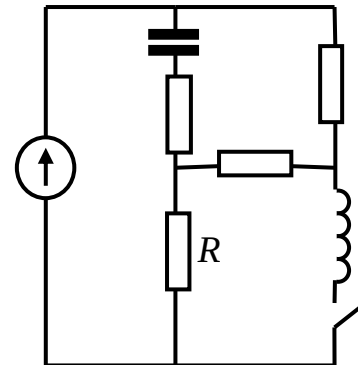
Puc. 1.9



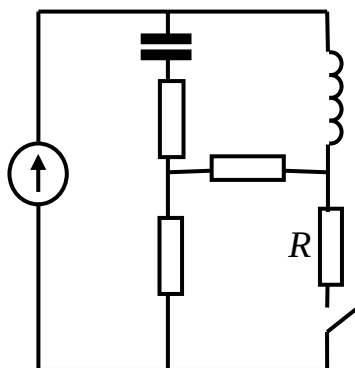
Puc. 1.10



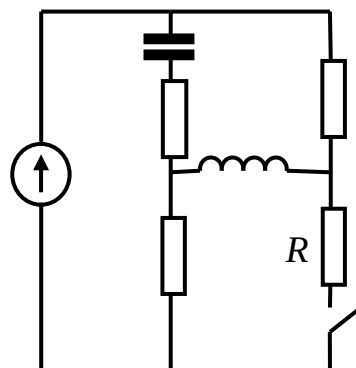
Puc. 1.11



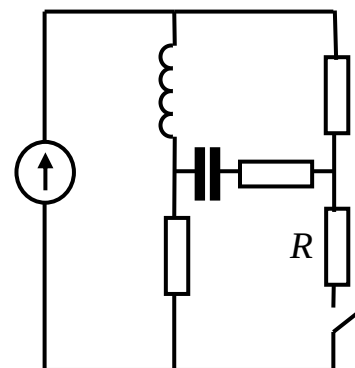
Puc. 1.12



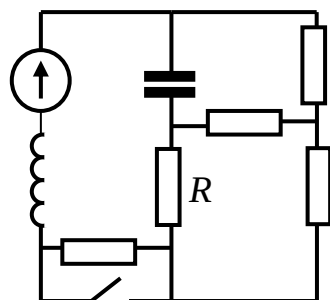
Puc. 1.13



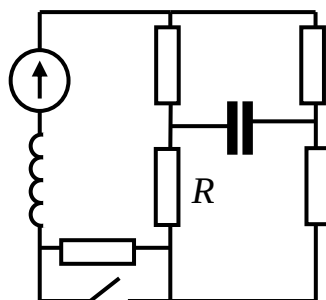
Puc. 1.14



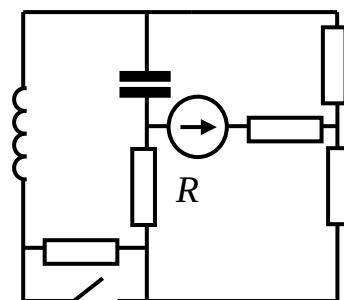
Puc. 1.15



Puc. 1.16



Puc. 1.17



Puc. 1.18

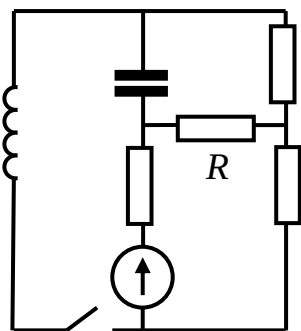


Рис. 1.19

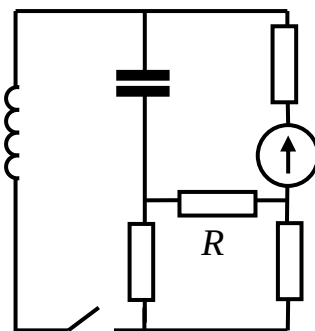


Рис. 1.20

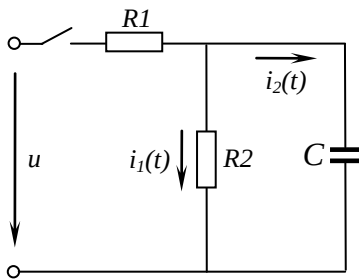
Таблица 1.2. Значения параметров электрических цепей к задаче 1.3

Номер варианта	Номер рисунка	U_m , В	ψ , рад	R_1 , Ом	R_2 , Ом	R_3 , Ом	X_L , Ом	X_C , Ом	Искомая переменная
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1.21	100	$\pi/6$	100	200	—	—	300	$i_2(t)$
2	1.22	300	$\pi/3$	30	30	25	30	—	$i_2(t)$
3	1.23	100	$\pi/4$	100	200	—	—	300	$i(t)$
4	1.24	200	$\pi/6$	300	100	—	300	—	$i(t)$
5	1.25	200	$\pi/4$	100	300	200	—	120	$u_C(t)$
6	1.26	400	$\pi/3$	400	600	200	120	—	$i(t)$
7	1.27	300	$\pi/6$	100	150	200	30	—	$i_2(t)$
8	1.28	300	$\pi/4$	300	200	—	400	—	$i_1(t)$
9	1.29	100	$\pi/6$	100	900	—	—	90	$i_1(t)$
10	1.30	100	$\pi/3$	40	60	—	32	—	$i(t)$
11	1.31	150	$\pi/3$	40	50	10	100	—	$i_1(t)$
12	1.32	200	$\pi/4$	30	20	50	—	100	$i_1(t)$
13	1.24	400	$\pi/3$	400	200	—	200	—	$i(t)$
14	1.25	500	$\pi/2$	200	400	100	—	100	$u_C(t)$
15	1.26	300	$\pi/6$	300	700	200	100	—	$i(t)$
16	1.27	220	$\pi/4$	50	200	180	300	—	$i_1(t)$
17	1.28	200	$\pi/6$	400	300	—	300	—	$i_2(t)$
18	1.29	200	$\pi/4$	900	100	—	—	90	$i_2(t)$
19	1.30	200	$\pi/6$	20	30	—	9	—	$i(t)$
20	1.31	250	$\pi/4$	10	40	50	50	—	$i_2(t)$
21	1.32	300	$\pi/6$	20	30	20	—	200	$i_2(t)$
22	1.21	200	$\pi/3$	50	150	—	—	500	$i_1(t)$
23	1.22	200	$\pi/2$	30	30	15	40	—	$i_1(t)$
24	1.23	200	$\pi/6$	300	100	—	—	400	$u_C(t)$
25	1.25	400	$\pi/6$	200	400	100	—	200	$u_C(t)$
26	1.33	300	$\pi/3$	30	30	25	30	—	$i_2(t)$
27	1.34	200	$\pi/6$	300	100	—	300	—	$i(t)$
28	1.35	200	$\pi/4$	30	20	50	—	100	$i_1(t)$
29	1.36	150	$\pi/3$	40	50	10	100	—	$i_1(t)$
30	1.37	100	$\pi/4$	100	200	—	—	300	$i(t)$

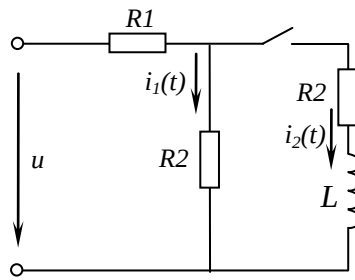
Продолжение табл. 1.2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
31	1.38	200	$\pi/4$	100	300	200	–	120	$u_C(t)$
32	1.33	300	$\pi/3$	30	30	25	30	–	$i_1(t)$
33	1.35	200	$\pi/4$	30	20	50	–	100	$i_2(t)$
34	1.36	150	$\pi/3$	40	50	10	100	–	$i_2(t)$
35	1.37	100	$\pi/4$	100	200	–	–	300	$u_C(t)$
36	1.40	250	$\pi/4$	10	40	50	50	–	$i_2(t)$
37	1.39	300	$\pi/6$	300	700	200	100	–	$i(t)$
38	1.40	250	$-\pi/4$	10	40	50	50	–	$i_1(t)$
39	1.21	100	$-\pi/2$	100	200	–	–	200	$i_2(t)$
40	1.22	300	$-\pi/6$	30	30	25	30	–	$i_2(t)$
41	1.23	100	$-\pi/3$	100	200	–	–	100	$i(t)$
42	1.24	200	$-\pi/4$	300	100	–	200	–	$i(t)$
43	1.25	200	$-\pi/3$	100	300	200	–	220	$u_C(t)$
44	1.26	400	$-\pi/3$	400	600	200	100	–	$i(t)$
45	1.27	300	$-\pi/6$	100	150	200	50	–	$i_2(t)$
46	1.28	300	$-\pi/4$	300	200	–	200	–	$i_1(t)$
47	1.29	100	$-\pi/6$	100	900	–	–	50	$i_1(t)$
48	1.30	100	$-\pi/3$	40	60	–	60	–	$i(t)$
49	1.31	150	$-\pi/3$	40	50	10	200	–	$i_1(t)$
50	1.32	200	$-\pi/4$	30	20	50	–	50	$i_1(t)$
51	1.24	400	$-\pi/3$	400	200	–	100	–	$i(t)$
52	1.25	500	$-\pi/2$	200	400	100	–	70	$u_C(t)$
53	1.26	300	$-\pi/6$	300	700	200	200	–	$i(t)$
54	1.27	220	$-\pi/4$	50	200	180	100	–	$i_1(t)$
55	1.28	200	$-\pi/6$	400	300	–	100	–	$i_2(t)$
56	1.29	200	$-\pi/4$	900	100	–	–	60	$i_2(t)$
57	1.30	200	$-\pi/6$	20	30	–	30	–	$i(t)$
58	1.31	250	$-\pi/4$	10	40	50	90	–	$i_2(t)$
59	1.32	300	$-\pi/6$	20	30	20	–	100	$i_2(t)$
60	1.21	200	$-\pi/3$	50	150	–	–	200	$i_1(t)$
61	1.22	200	$-\pi/2$	30	30	15	70	–	$i_1(t)$
62	1.23	200	$-\pi/6$	300	100	–	–	200	$u_C(t)$
63	1.25	400	$-\pi/6$	200	400	100	–	100	$u_C(t)$
64	1.33	300	$-\pi/3$	30	30	25	50	–	$i_2(t)$
65	1.34	200	$-\pi/6$	300	100	–	100	–	$i(t)$
66	1.35	200	$-\pi/4$	30	20	50	–	200	$i_1(t)$
67	1.36	150	$-\pi/3$	40	50	10	300	–	$i_1(t)$
68	1.37	100	$-\pi/4$	100	200	–	–	500	$i(t)$
69	1.38	200	$\pi/6$	100	300	200	–	200	$u_C(t)$
70	1.33	300	$\pi/2$	30	30	25	70	–	$i_1(t)$
71	1.35	200	$\pi/3$	30	20	50	–	200	$i_2(t)$
72	1.36	150	$\pi/4$	40	50	10	300	–	$i_2(t)$
73	1.37	100	$\pi/6$	100	200	–	–	400	$u_C(t)$
74	1.40	250	$\pi/6$	10	40	50	80	–	$i_2(t)$
75	1.39	300	$\pi/3$	300	700	200	200	–	$i(t)$

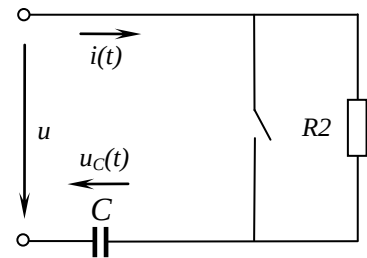
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
76	1.40	250	$-\pi/4$	10	40	50	90	–	$i_1(t)$
77	1.21	100	$\pi/2$	100	200	–	–	200	$i_2(t)$
78	1.22	300	$-\pi/4$	30	30	25	70	–	$i_2(t)$
79	1.23	100	$-\pi/4$	100	200	–	–	200	$i(t)$
80	1.24	200	$-\pi/6$	300	100	–	100	–	$i(t)$
81	1.25	200	$-\pi/4$	100	300	200	–	80	$u_C(t)$
82	1.26	400	$\pi/6$	400	600	200	200	–	$i(t)$
83	1.27	300	$\pi/3$	100	150	200	50	–	$i_2(t)$
84	1.28	300	$\pi/6$	300	200	–	200	–	$i_1(t)$
85	1.29	100	$-\pi/4$	100	900	–	–	60	$i_1(t)$
86	1.30	100	$-\pi/3$	40	60	–	70	–	$i(t)$
87	1.31	150	$-\pi/3$	40	50	10	200	–	$i_1(t)$
88	1.32	200	$\pi/6$	30	20	50	–	300	$i_1(t)$
89	1.24	400	$\pi/4$	400	200	–	100	–	$i(t)$
90	1.25	500	$\pi/3$	200	400	100	–	200	$u_C(t)$
91	1.26	300	$\pi/2$	300	700	200	300	–	$i(t)$
92	1.27	220	$-\pi/4$	50	200	180	400	–	$i_1(t)$
93	1.28	200	$-\pi/6$	400	300	–	100	–	$i_2(t)$
94	1.29	200	$-\pi/4$	900	100	–	–	60	$i_2(t)$
95	1.30	200	$-\pi/6$	20	30	–	30	–	$i(t)$
96	1.31	250	$-\pi/4$	10	40	50	90	–	$i_2(t)$
97	1.32	300	$\pi/2$	20	30	20	–	100	$i_2(t)$
98	1.21	200	$\pi/4$	50	150	–	–	400	$i_1(t)$
99	1.22	200	$\pi/4$	30	30	15	90	–	$i_1(t)$
100	1.23	200	$\pi/3$	300	100	–	–	500	$u_C(t)$



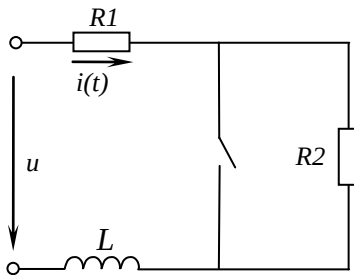
Puc. 1.21



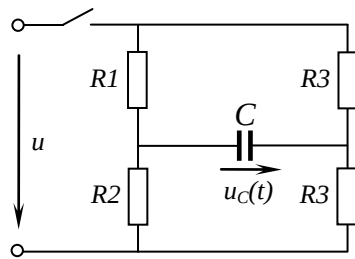
Puc. 1.22



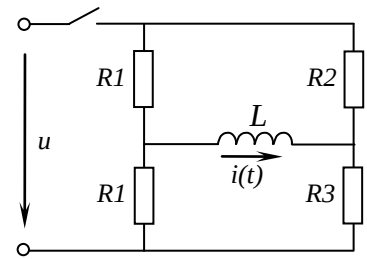
Puc. 1.23



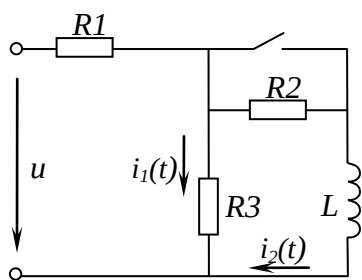
Puc. 1.24



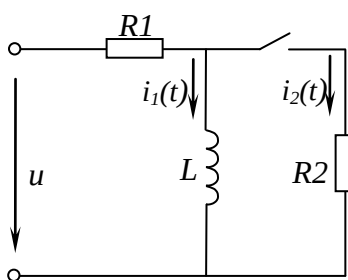
Puc. 1.25



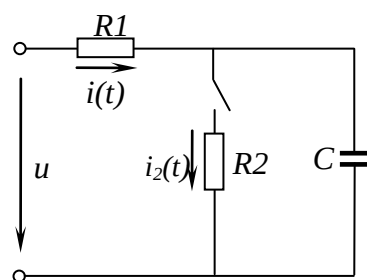
Puc. 1.26



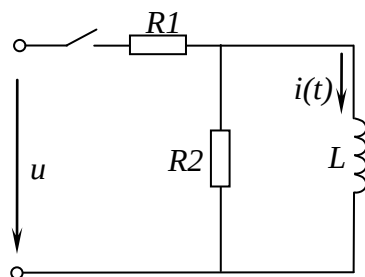
Puc. 1.27



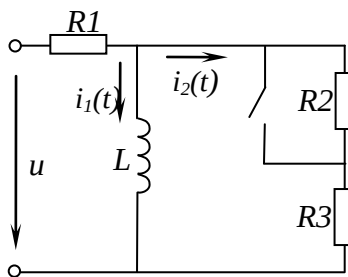
Puc. 1.28



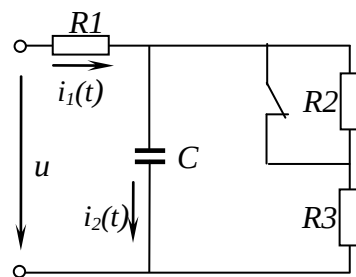
Puc. 1.29



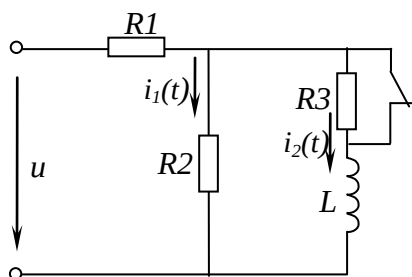
Puc. 1.30



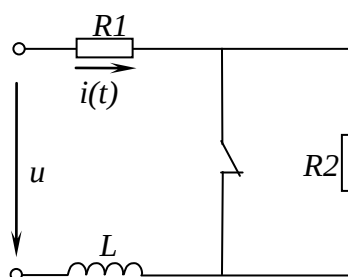
Puc. 1.31



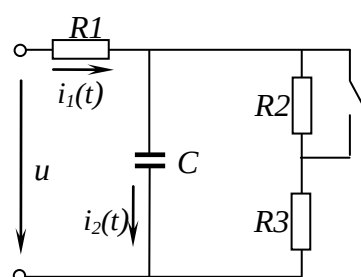
Puc. 1.32



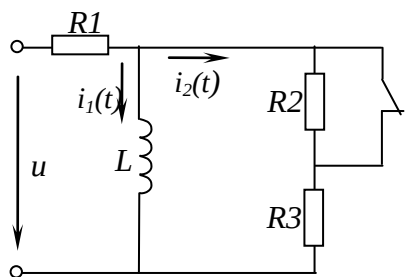
Puc. 1.33



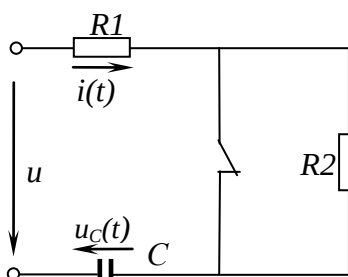
Puc. 1.34



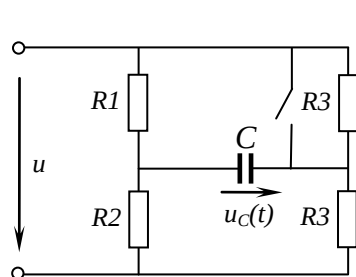
Puc. 1.35



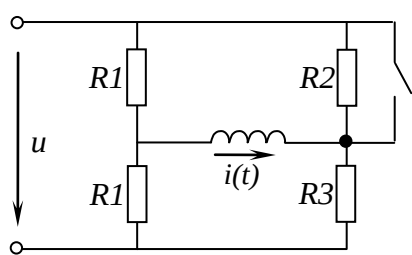
Puc. 1.36



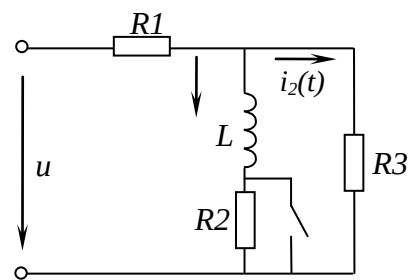
Puc. 1.37



Puc. 1.38



Puc. 1.39



Puc. 1.40

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ К ЗАДАНИЮ 1

КЛАССИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

Классический метод расчета переходных процессов заключается в непосредственном интегрировании дифференциальных уравнений, описывающих изменения токов и напряжений на участках цепи в переходном процессе.

В общем случае при использовании классического метода расчета составляются уравнения электромагнитного состояния цепи по законам Ома и Кирхгофа для мгновенных значений напряжений и токов, связанных между собой на отдельных элементах цепи соотношениями, приведенными в табл. 1.3.

Таблица 1.3. Связь мгновенных значений напряжений и токов на элементах электрической цепи

Резистор (идеальное активное сопротивление)	Катушка индуктивности (идеальная индуктивность)	Конденсатор (идеальная емкость)
$u_R = Ri_R$	$u_L = L \frac{di_L}{dt};$ при наличии магнитной связи с катушкой, обтекаемой током i_M , $u_L = L \frac{di_L}{dt} \pm M \frac{di_M}{dt}$	$i_C = C \frac{du_C}{dt};$ $u_C = \frac{1}{C} \int i_C dt$

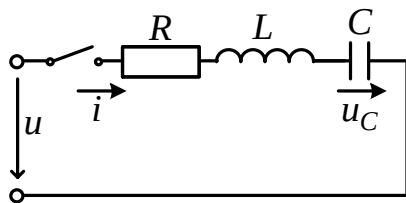


Рис. 1.41

Для последовательной цепи, содержащей линейные резистор R , катушку индуктивности L и конденсатор C , при ее подключении к источнику с напряжением u (см. рис. 1.41) можно записать

$$u = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt. \quad (1.1)$$

Подставив в (1.1) значение тока через конденсатор

$$i = C \frac{du_C}{dt},$$

получим линейное дифференциальное уравнение второго порядка относительно u_C :

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = u.$$

В общем случае уравнение, описывающее переходный процесс в цепи с n независимыми накопителями энергии, имеет вид

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_k \frac{d^k x}{dt^k} + \dots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = f(t), \quad (1.2)$$

где x – искомая функция времени (напряжение, ток, потокосцепление и т.п.); $f(t)$ – известное возмущающее воздействие (напряжение и (или) ток источника электрической энергии); a_k – k -й постоянный коэффициент, определяемый параметрами цепи.

Порядок данного уравнения равен числу независимых накопителей энергии в цепи, под которыми понимаются катушки индуктивности и конденсаторы в упрощенной схеме, получаемой из исходной путем объединения индуктивностей и соответственно емкостей элементов, соединения между которыми являются последовательными или параллельными.

В общем случае порядок дифференциального уравнения определяется соотношением

$$n = n_L + n_C - \kappa_L - \kappa_C, \quad (1.3)$$

где n_L и n_C – соответственно число катушек индуктивности и конденсаторов после указанного упрощения исходной схемы; κ_L – число узлов, в которых сходятся только ветви, содержащие катушки индуктивности (в соответствии с первым законом Кирхгофа ток через любую катушку индуктивности в этом случае определяется токами через остальные катушки); κ_C – число контуров схемы, ветви которых содержат только конденсаторы (в соответствии со вторым законом Кирхгофа напряжение на любом из конденсаторов в этом случае определяется напряжениями на других).

Наличие индуктивных связей на порядок дифференциального уравнения не влияет.

Как известно из математики, общее решение уравнения (1.2) представляет собой сумму частного решения исходного неоднородного уравнения и общего решения однородного уравнения, получаемого из исходного путем приравнивания его левой части к нулю. Поскольку с математической стороны не накладывается каких-либо ограничений на выбор частного решения (1.2), применительно к электротехнике в качестве последнего удобно принять решение x_{np} , соответствующее искомой переменной x в установившемся послекоммутационном режиме (теоретически для $t \rightarrow \infty$).

Частное решение x_{np} уравнения (1.2) определяется видом функции $f(t)$, стоящей в его правой части, и поэтому называется **принужденной составляющей**. Для цепей с заданными постоянными или периодическими напряжениями (токами) источников принужденная составляющая определяется путем расчета стационарного режима работы

схемы после коммутации любым из рассмотренных ранее методов расчета линейных электрических цепей.

Вторая составляющая $x_{св}$ общего решения x уравнения (1.2) – решение (1.2) с нулевой правой частью – соответствует режиму, когда внешние (принуждающие) силы (источники энергии) на цепь непосредственно не воздействуют. Влияние источников проявляется здесь опосредовано через энергию, запасенную в полях катушек индуктивности и конденсаторов. Данный режим работы схемы называется свободным, а переменная $x_{св}$ – **свободной составляющей**.

В соответствии с вышесказанным, общее решение уравнения (1.2) имеет вид

$$x = x_{np} + x_{св}. \quad (1.4)$$

Соотношение (1.4) показывает, что при классическом методе расчета послекоммутационный процесс рассматривается как наложение друг на друга двух режимов – принужденного, наступающего как бы сразу после коммутации, и свободного, имеющего место только в течение переходного процесса.

Необходимо подчеркнуть, что, поскольку принцип наложения справедлив только для линейных систем, метод решения, основанный на указанном разложении искомой переменной x , справедлив только для линейных цепей.

Начальные условия. Законы коммутации

В соответствии с определением свободной составляющей $x_{св}$ в ее выражении имеют место постоянные интегрирования A_k , число которых равно порядку дифференциального уравнения. Постоянные интегрирования находятся из начальных условий, которые принято делить на **независимые** и **зависимые**. К независимым начальным условиям относятся потокосцепление (ток) для катушки индуктивности и заряд (напряжение) на конденсаторе в момент времени $t = 0$ (момент коммутации). Независимые начальные условия определяются на основании законов коммутации (см. табл. 1.4).

Таблица 1.4. Законы коммутации

Название закона	Формулировка закона
Первый закон коммутации (закон сохранения потокосцепления)	Магнитный поток, сцепленный с катушками индуктивности контура, в момент коммутации сохраняет то значение, которое имел до коммутации, и начинает изменяться именно с этого значения: $\psi(0+) = \psi(0-)$.
Второй закон коммутации (закон сохранения заряда)	Электрический заряд на конденсаторах, присоединенных к любому узлу, в момент коммутации сохраняет то значение, которое имел до коммутации, и начинает изменяться именно с этого значения: $q(0+) = q(0-)$.

Доказать законы коммутации можно от противного: если допустить обратное, то получаются бесконечно большие значения $u_L = d\psi/dt = \infty$ и $i_C = dq/dt = \infty$, что приводит к нарушению законов Кирхгофа.

На практике, за исключением особых случаев (некорректные коммутации), допустимо использование указанных законов в другой формулировке, а именно:

первый закон коммутации – в ветви с катушкой индуктивности ток в момент коммутации сохраняет свое докоммутационное значение и в дальнейшем начинает изменяться с него:
 $i_L(0+) = i_L(0-)$.

второй закон коммутации – напряжение на конденсаторе в момент коммутации сохраняет свое докоммутационное значение и в дальнейшем начинает изменяться с него:
 $u_C(0+) = u_C(0-)$.

Необходимо подчеркнуть, что более общей формулировкой законов коммутации является положение о невозможности скачкообразного изменения в момент коммутации для схем с катушкой индуктивности – потокосцеплений, а для схем с конденсаторами – зарядов на них. В качестве иллюстрации сказанному могут служить схемы на рис. 1.42, переходные процессы в которых относятся к так называемым **некорректным коммутациям** (название произошло от пренебрежения в подобных схемах малыми параметрами, корректный учет которых может привести к существенному усложнению задачи). Действительно, при переводе в схеме на рис. 1.42,а ключа из положения 1 в положение 2 трактование второго закона коммутации как невозможность скачкообразного изменения напряжения на конденсаторе приводит

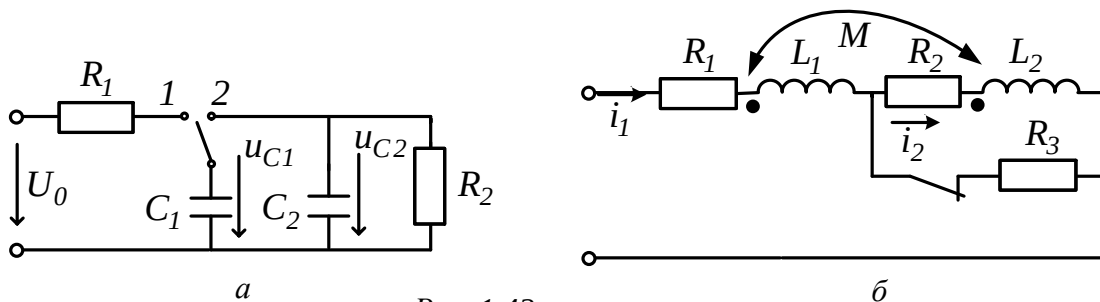


Рис. 1.42

к невыполнению второго закона Кирхгофа ($u_{C1}(0) \neq u_{C2}(0)$). Аналогично при размыкании ключа в схеме на рис. 1.42,б трактование первого закона коммутации как невозможность скачкообразного изменения тока через катушку индуктивности приводит к невыполнению первого закона Кирхгофа ($i_1(0) \neq i_2(0)$). Для данных схем, исходя из сохранения заряда и соответственно потокосцепления, можно записать

$$C_1 u_{C1}(0-) + C_2 u_{C2}(0-) = C_1 U_0 = (C_1 + C_2) u_C(0+);$$

$$L_1 i_1(0-) + M i_2(0-) + L_2 i_2(0-) + M i_1(0-) = (L_1 + L_2 + 2M) i(0+).$$

Зависимыми начальными условиями называются значения остальных токов и напряжений, а также производных от искомой функции в момент коммутации, определяемые по независимым начальным условиям при помощи уравнений, составляемых по законам Кирхгофа для $t = 0$. Необходимое число начальных условий равно числу постоянных интегрирования. Поскольку уравнение вида (1.2) рационально записывать для переменной, начальное значение которой относится к независимым начальным условиям, задача нахождения начальных условий обычно сводится к нахождению значений этой переменной и ее производных до $(n-1)$ порядка включительно при $t = 0$.

Пример. Определить токи и производные di_2/dt и du_C/dt в

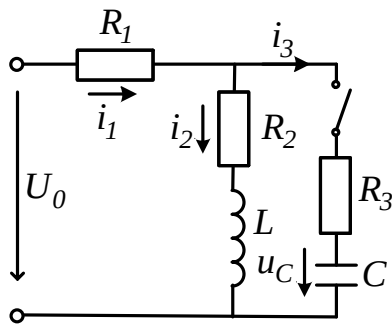


Рис. 1.43

момент коммутации в схеме на рис. 1.43, если до коммутации конденсатор был не заряжен.

1. В соответствии с законами коммутации

$$u_C(0) = 0 \quad \text{и} \quad i_2(0) = \frac{U_0}{R_1 + R_2}.$$

2. На основании второго закона Кирхгофа для момента коммутации имеет место

$$R_1(i_2(0) + i_3(0)) + i_3(0)R_3 + u_C(0) = U_0,$$

откуда

$$i_3(0) = \frac{U_0 - R_1 i_2(0)}{R_1 + R_2}$$

и $i_1(0) = i_2(0) + i_3(0)$.

3. Для известных значений $i_1(0)$ и $i_2(0)$ из уравнения

$$R_1 i_1(0) + R_2 i_2(0) + L \left. \frac{di_2}{dt} \right|_0 = U_0$$

определяется $\left. \frac{di_2}{dt} \right|_0$.

4. Значение производной от напряжения на конденсаторе в момент коммутации (см. табл. 1.3)

$$\left. \frac{du_C}{dt} \right|_0 = \frac{i_3(0)}{C}.$$

Корни характеристического уравнения. Постоянная времени

Выражение свободной составляющей $x_{св}$ общего решения x дифференциального уравнения (1.2) определяется видом корней характеристического уравнения (см. табл. 1.5).

Таблица 1.5. Выражения свободных составляющих общего решения

Вид корней характеристического уравнения	Выражение свободной составляющей
1. Корни $p_1, p_2, \dots, p_n$ вещественные и различные	$x_{св} = \sum_{k=1}^n A_k e^{p_k t}$
2. Корни $p_1, p_2, \dots, p_n$ вещественные и $p_1 = p_2 = \dots = p_m = p$ ($m < n$)	$x_{св} = \sum_{k=1}^m A_k t^{k-1} e^{pt} + \sum_{k=m+1}^n A_k e^{p_k t}$
3. Пары комплексно-сопряженных корней $p_{k,k+1} = -\delta_k \pm j\omega_k$	$\begin{aligned} x'_{св} &= e^{-\delta_k t} (A_k \cos \omega_k t + A_{k+1} \sin \omega_k t) = \\ &= B_k e^{-\delta_k t} \sin(\omega_k t + \varphi_k) \end{aligned}$

Необходимо помнить, что, поскольку в линейной цепи с течением времени свободная составляющая затухает, вещественные части корней характеристического уравнения не могут быть положительными.

При вещественных корнях $x_{св}$ монотонно затухает, и имеет место **апериодический переходный процесс**. Наличие пары комплексно сопряженных корней обуславливает появление затухающих синусоидальных колебаний (**колебательный переходный процесс**).

Поскольку физически колебательный процесс связан с периодическим обменом энергией между магнитным полем катушки индуктивности и электрическим полем конденсатора, комплексно-сопряженные корни могут иметь место только для цепей, содержащих оба типа накопителей. Быстроту затухания колебаний принято характеризовать отношением

$$\frac{x(t)}{x(t + T_0)} = e^{\delta T_0},$$

которое называется **декрементом колебания**, или натуральным логарифмом этого отношения

$$\Delta = \ln e^{\delta T_0} = \delta T_0,$$

называемым **логарифмическим декрементом колебания**, где $T_0 = 2\pi/\omega_0$.

Важной характеристикой при исследовании переходных процессов является постоянная времени τ , определяемая для цепей первого порядка как

$$\tau = \text{mod}(1/p),$$

где p – корень характеристического уравнения.

Постоянную времени можно интерпретировать как временной интервал, в течение которого свободная составляющая уменьшится в e раз по сравнению со своим начальным значением. Теоретически переходный процесс длится бесконечно долго. Однако на практике считается, что он заканчивается при $t = (3 \dots 4)\tau$.

Способы составления характеристического уравнения

Характеристическое уравнение составляется для цепи после коммутации. Оно может быть получено следующими способами:

- непосредственно на основе дифференциального уравнения вида (1.2), т.е. путем исключения из системы уравнений, описывающих электромагнитное состояние цепи на основании первого и второго законов Кирхгофа, всех неизвестных величин, кроме одной, относительно которой и записывается уравнение (1.2);

- путем использования выражения для входного сопротивления цепи на синусоидальном токе;

- на основе выражения главного определителя.

Согласно первому способу ранее было получено дифференциальное уравнение относительно напряжения u_C на конденсаторе для последовательной $R-L-C$ -цепи, на базе которого записывается характеристическое уравнение.

Следует отметить, что, поскольку линейная цепь охвачена единым переходным процессом, корни характеристического уравнения являются общими для всех свободных составляющих напряжений и токов ветвей схемы, параметры которых входят в характеристическое уравнение. Поэтому по первому способу составления характеристического уравнения в качестве переменной, относительно которой оно записывается, может быть выбрана любая.

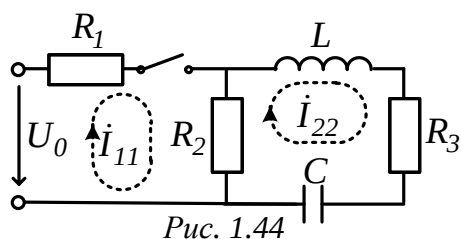


Рис. 1.44

Применение второго и третьего способов составления характеристического уравнения рассмотрим на примере цепи рис. 1.44. Составление характеристического уравнения по методу входного

сопротивления заключается в следующем:

- записывается входное сопротивление цепи на переменном токе;
- $j\omega$ заменяется на оператор p ;
- полученное выражение $Z(p)$ приравнивается к нулю.

Уравнение

$$Z(p) = 0$$

совпадает с характеристическим.

Следует подчеркнуть, что входное сопротивление может быть записано относительно места разрыва любой ветви схемы. При этом

активный двухполюсник заменяется пассивным по аналогии с методом эквивалентного генератора. Данный способ составления характеристического уравнения предполагает отсутствие в схеме магнитосвязанных ветвей; при наличии таковых необходимо осуществить их предварительное развязывание.

Для цепи на рис. 1.44 относительно зажимов источника

$$\underline{Z}(j\omega) = R_1 + \frac{R_2 \left(j\omega L + R_3 + \frac{1}{j\omega C} \right)}{R_2 + R_3 + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}.$$

Заменяв $j\omega$ на p и приравняв полученное выражение к нулю, запишем

$$Z(p) = R_1 + \frac{R_2 \left(pL + R_3 + \frac{1}{pC} \right)}{R_2 + R_3 + pL + \frac{1}{pC}} = 0$$

или

$$CL(R_1 + R_2)p^2 + C(R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3)p + (R_1 + R_2) = 0. \quad (1.5)$$

При составлении характеристического уравнения на основе выражения главного определителя число алгебраических уравнений, на базе которых он записывается, равно числу неизвестных свободных составляющих токов. Алгебраизация исходной системы интегро-дифференциальных уравнений, составленных, например, на основании законов Кирхгофа или по методу контурных токов, осуществляется заменой символов дифференцирования и интегрирования соответственно на умножение и деление на оператор p . Характеристическое уравнение получается путем приравнивания записанного определителя к нулю. Поскольку выражение для главного определителя не зависит от правых частей системы неоднородных уравнений, его составление можно производить на основе системы уравнений, записанных для полных токов.

Для цепи на рис. 1.44 алгебраизованная система уравнений на основе метода контурных токов имеет вид

$$\begin{aligned} i_{11}(R_1 + R_2) - i_{22}R_2 &= U_0; \\ -i_{11}R_2 + i_{22} \left(R_2 + R_3 + Lp + \frac{1}{Cp} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда выражение для главного определителя этой системы:

$$D = \begin{vmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R_2 + R_3 + Lp + \frac{1}{Cp} \end{vmatrix} = (R_1 + R_2) \left(R_2 + R_3 + Lp + \frac{1}{Cp} \right) - R_2^2.$$

Приравняв D к нулю, получим результат, аналогичный (1.5).

Общая методика расчета переходных процессов классическим методом

В общем случае методика расчета переходных процессов классическим методом включает следующие этапы:

1. Запись выражения для искомой переменной в виде

$$x(t) = x_{np} + x_{св}. \quad (1.6)$$

2. Нахождение принужденной составляющей общего решения на основании расчета установившегося режима послекоммутационной цепи.

3. Составление характеристического уравнения и определение его корней (для цепей, описываемых дифференциальными уравнениями первого порядка, вместо корней можно находить постоянную времени τ – см. далее). Запись выражения свободной составляющей в форме, определяемой типом найденных корней.

4. Подстановка полученных выражений принужденной и свободной составляющих в соотношение (1.6).

5. Определение начальных условий и на их основе – постоянных интегрирования.

Примеры расчета переходных процессов классическим методом

1. Переходные процессы в R–L-цепи при ее подключении к источнику напряжения

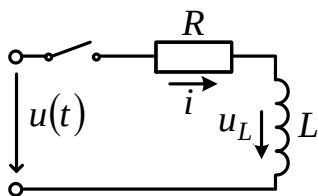


Рис. 1.45

Такие процессы имеют место, например, при подключении к источнику питания электромагнитов, трансформаторов, электрических двигателей и т.п.

Рассмотрим два случая:

а) $u(t) = U_0$;

б) $u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi_U)$.

Согласно рассмотренной методике для тока в цепи на рис. 1.45 можно записать

$$i = i_{np} + i_{св}. \quad (1.7)$$

Тогда для первого случая принужденная составляющая тока

$$i_{np} = \frac{U_0}{R}. \quad (1.8)$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$Lp + R = 0,$$

откуда $p = -R/L$ и постоянная времени $\tau_L = |1/p| = L/R$.

Таким образом,

$$i_{cs} = Ae^{-\frac{t}{\tau_L}}. \quad (1.9)$$

Подставляя (1.8) и (1.9) в соотношение (1.7), запишем:

$$i = \frac{U_0}{R} + Ae^{-\frac{t}{\tau_L}}.$$

В соответствии с первым законом коммутации $i(0) = 0$. Тогда

$$i(0) = \frac{U_0}{R} + A = 0,$$

откуда $A = -U_0/R$.

Таким образом, ток в цепи в переходном процессе описывается уравнением

$$i(t) = \frac{U_0}{R} - \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau_L}},$$

а напряжение на катушке индуктивности – выражением

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} = U_0 e^{-\frac{t}{\tau_L}}.$$

Качественный вид кривых $i(t)$ и $u_L(t)$, соответствующих полученным решениям, представлен на рис. 1.46.

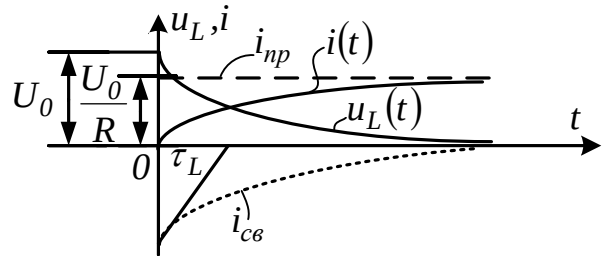


Рис. 1.46

При втором типе источника принужденная составляющая рассчитывается с использованием символического метода:

$$\dot{I}_{npm} = \frac{\dot{U}_m}{R + j\omega L} = \frac{U_m e^{j\varphi_U}}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2} e^{j \arctg \frac{\omega L}{R}}} = I_m e^{j(\varphi_U - \varphi)},$$

где $I_m = U_m / \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$; $\varphi = \arctg(\omega L/R)$.

Отсюда

$$i_{np} = I_m \sin(\omega t + \varphi_U - \varphi).$$

Выражение свободной составляющей не зависит от типа источника напряжения. Следовательно,

$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi_U - \varphi) + Ae^{-\frac{t}{\tau_L}}.$$

Поскольку $i(0) = 0$, то

$$0 = I_m \sin(\varphi_U - \varphi) + A.$$

Таким образом, окончательно получаем

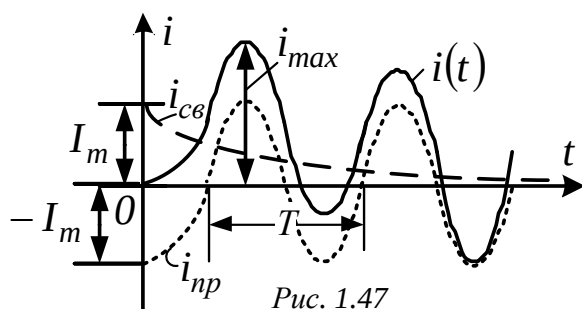
$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi_U - \varphi) - I_m \sin(\varphi_U - \varphi) e^{-\frac{t}{\tau_L}}. \quad (1.10)$$

Анализ полученного выражения (1.10) показывает следующее.

1. При начальной фазе напряжения $\varphi_U = \varphi \pm \pi$ постоянная интегрирования $A=0$. Таким образом, в этом случае коммутация не повлечет за собой переходного процесса и в цепи сразу возникнет установившийся режим.

2. При $\varphi_U - \varphi = \pm \pi/2$ свободная составляющая максимальна по модулю. В этом случае ток переходного процесса достигает своей наибольшей величины.

Если τ_L значительна по величине, то за полпериода свободная



составляющая существенно не уменьшается. В этом случае максимальная величина тока переходного процесса i_{max} может существенно превышать амплитуду тока установившегося режима. Как видно из рис. 1.47, где $\varphi_U - \varphi = -\pi/2$, максимум тока имеет место примерно через

$t = T/2$. В пределе при $\tau_L \rightarrow \infty$ $i_{max} = 2I_m$.

Таким образом, для линейной цепи максимальное значение тока переходного режима не может превышать удвоенной амплитуды принужденного тока: $i_{Lmax} < 2I_m$.

Аналогично для линейной цепи с конденсатором: если в момент коммутации принужденное напряжение равно своему амплитудному значению и постоянная времени τ_C цепи достаточно велика, то примерно через половину периода напряжение на конденсаторе достигает своего максимального значения u_{Cmax} , которое не может превышать удвоенной амплитуды принужденного напряжения: $u_{Cmax} < 2U_{Cm}$.

2. Переходные процессы при отключении катушки индуктивности от источника питания

При размыкании ключа в цепи на рис. 1.48 принужденная составляющая тока через катушку индуктивности $i_{np} = 0$.

Характеристическое уравнение имеет вид

$$Lp + R + R_k = 0,$$

откуда $p = -(R + R_k)/L$ и $\tau_L = L/(R + R_k)$.

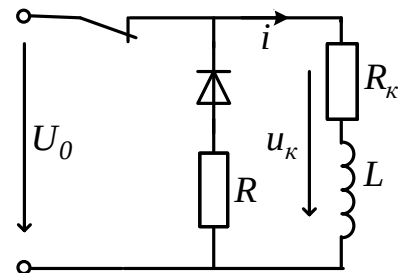


Рис. 1.48

В соответствии с первым законом коммутации

$$i(0) = \frac{U_0}{R_k} = A.$$

Таким образом, ток в переходном режиме

$$i(t) = \frac{U_0}{R_k} e^{-\frac{t}{\tau_L}}$$

и напряжение на катушке индуктивности

$$u_k(t) = -Ri = -\frac{R}{R_k} U_0 e^{-\frac{t}{\tau_L}}. \quad (1.11)$$

Анализ (1.11) показывает, что при размыкании цепей, содержащих индуктивные элементы, могут возникать большие перенапряжения, которые без принятия специальных мер могут вывести аппаратуру из строя. Действительно, при $n = R/R_k \gg 1$ модуль напряжения на катушке индуктивности в момент коммутации будет во много раз превышать напряжение источника: $u_k(0) = nU_0$. При отсутствии гасящего резистора R указанное напряжение прикладывается к размыкающимся контактам ключа, в результате чего между ними возникает дуга.

3. Заряд и разряд конденсатора

При переводе ключа в положение 1 (см. рис. 1.49) начинается процесс заряда конденсатора:

$$u_C(t) = u_{C np} + u_{C св}.$$

Принужденная составляющая напряжения на конденсаторе $u_{C np} = U_0$.

Из характеристического уравнения

$$R_1 + \frac{1}{Cp} = 0$$

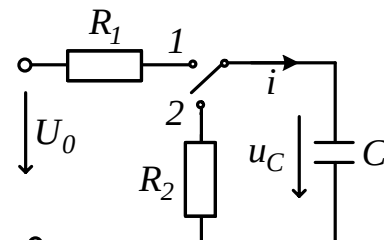


Рис. 1.49

определяется корень $p = -1/(R_1 C)$. Отсюда постоянная времени $\tau_{C1} = R_1 C$.

Таким образом,

$$u_C = U_0 + A e^{-\frac{t}{\tau_{C1}}}.$$

При $t=0$ напряжение на конденсаторе равно $u_C(0)$ (в общем случае к моменту коммутации конденсатор может быть заряженным, т.е. $u_C(0) \neq 0$). Тогда $A = u_C(0) - U_0$ и

$$u_C(t) = U_0 + (u_C(0) - U_0) e^{-\frac{t}{\tau_{C1}}}.$$

Соответственно для зарядного тока можно записать

$$i(t) = C \frac{du_C}{dt} = \frac{U_0 - u_C(0)}{R_1} e^{-\frac{t}{\tau_{C1}}}.$$

В зависимости от величины $u_C(0)$: 1 – $u_C(0) = 0$; 2 – $0 < u_C(0) < U_0$; 3 – $u_C(0) < 0$; 4 – $u_C(0) > U_0$ – возможны четыре вида кривых переходного процесса, которые иллюстрирует рис. 1.50.

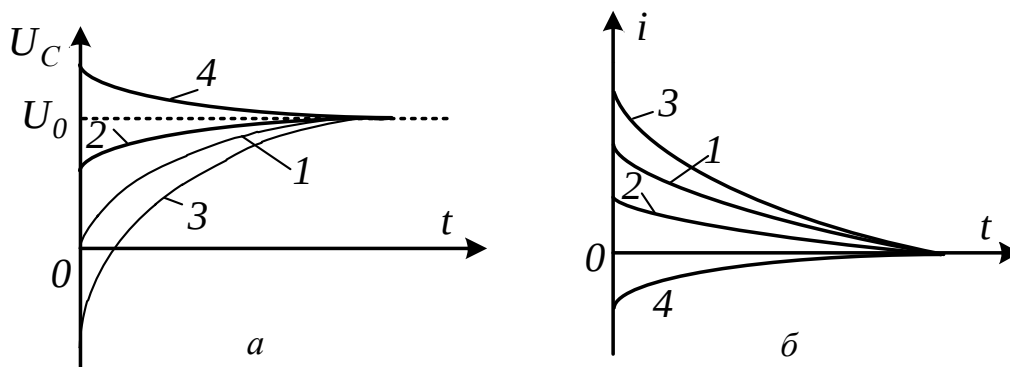


Рис. 1.50

При разряде конденсатора на резистор R_2 (ключ на рис.1.49 переводится в положение 2) $u_{Cnp} = 0$. Постоянная времени $\tau_{C2} = R_2 C$.

Тогда, принимая, что к моменту коммутации конденсатор был заряжен до напряжения $u_{C1}(0)$ (в частном случае $u_{C1}(0) = U_0$), для напряжения на нем в переходном режиме можно записать:

$$u_C(t) = u_{C1}(0) e^{-\frac{t}{\tau_{C2}}}.$$

Соответственно разрядный ток

$$i(t) = C \frac{du_C}{dt} = -\frac{u_{C1}(0)}{R_2} e^{-\frac{t}{\tau_{C2}}}. \quad (1.12)$$

Как видно из (1.12), во избежание значительных бросков разрядного тока величина R_2 должна быть достаточно большой.

В заключение отметим, что процессы заряда и разряда конденсатора используются в генераторах пилообразного напряжения, широко применяемых в автоматике. Для этого ключ в схеме на рис. 1.49 заменяется на электронный.

Переходные процессы в цепи с одним накопителем энергии и произвольным числом резисторов

Как отмечалось ранее, линейная цепь охвачена единым переходным процессом. Поэтому в рассматриваемых цепях с одним накопителем энергии (катушкой индуктивности или конденсатором) – цепях первого порядка – постоянная времени будет одной и той же для всех свободных составляющих напряжений и токов ветвей схемы, параметры которых входят в характеристическое уравнение.

Общий подход к расчету переходных процессов в таких цепях основан на применении теоремы об активном двухполюснике: ветвь, содержащую накопитель, выделяют из цепи, а оставшуюся часть схемы рассматривают как активный двухполюсник A (эквивалентный генератор) (см. рис.1.51,а) со схемой замещения на рис. 1.51,б.

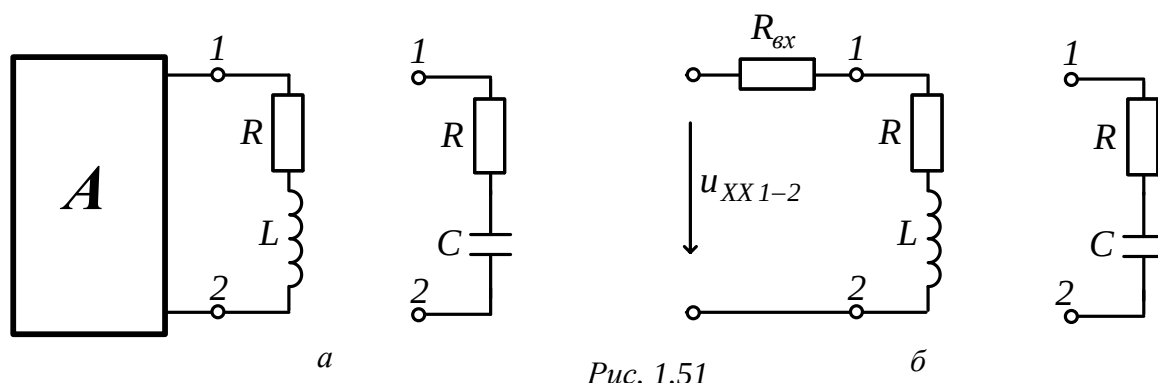


Рис. 1.51

Совершенно очевидно, что постоянная времени здесь для цепей с индуктивным элементом определяется как

$$\tau_L = \frac{L}{R_{ex} + R}$$

и с емкостным как

$$\tau_C = C(R_{ex} + R),$$

где R_{ex} – входное сопротивление цепи по отношению к зажимам 1–2 подключения ветви, содержащей накопитель энергии.

Например, для напряжения на конденсаторе в цепи на рис. 1.52 можно записать:

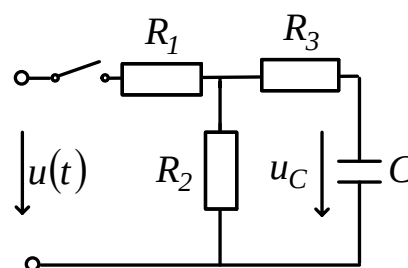


Рис. 1.52

$$u_C(t) = u_{Cnp}(t) + (u_C(0) - u_{Cnp}(0))e^{-\frac{t}{\tau_C}},$$

где в соответствии с вышеизложенным

$$\tau_C = C \left(R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right).$$

Переходные процессы при подключении последовательной R–L–C-цепи к источнику напряжения

Рассмотрим два случая:

а) $u(t) = U_0$;

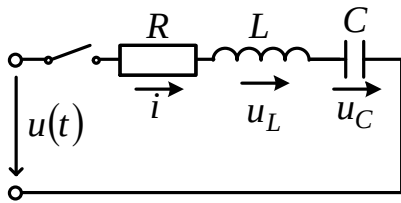


Рис. 1.53

б) $u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi_U)$.

Согласно изложенной выше методике расчета переходных процессов классическим методом для напряжения на конденсаторе в цепи на рис. 1.53 можно записать

$$u_C(t) = u_{Cnp} + u_{Cсв}. \quad (1.13)$$

Тогда для первого случая принужденная составляющая этого напряжения

$$u_{Cnp} = U_0. \quad (1.14)$$

Характеристическое уравнение цепи имеет вид

$$LCp^2 + RCp + 1 = 0,$$

решая его, получаем

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}.$$

В зависимости от соотношения параметров цепи возможны три типа корней и соответственно три варианта выражения для свободной составляющей:

1. $\frac{R}{2L} > \frac{1}{\sqrt{LC}}$, или $R > R_{кр} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, где $R_{кр}$ – критическое

сопротивление контура, меньше которого свободный процесс носит колебательный характер.

В этом случае

$$u_{Cсв} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}. \quad (1.15)$$

2. $R = R_{кр}$ – предельный случай апериодического режима.

В этом случае $p_1 = p_2 = p = -R/(2L)$ и

$$u_{Cсв} = (A_1 + A_2 t) e^{pt}. \quad (1.16)$$

3. $R < R_{кр}$ – периодический (колебательный) характер переходного процесса.

В этом случае $p_{1,2} = -\delta \pm j\omega_0$ и

$$u_{C\text{ сз}} = Ae^{-\delta t} \sin(\omega_0 t + \varphi), \quad (1.17)$$

где $\delta = R/(2L)$ – коэффициент затухания; $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = \frac{2\pi}{T_0}$ –

угловая частота собственных колебаний; T_0 – период собственных колебаний.

Для апериодического характера переходного процесса после подстановки (1.14) и (1.15) в соотношение (1.13) можно записать

$$u_C(t) = U_0 + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}.$$

Для нахождения постоянных интегрирования, учитывая, что в общем случае $u_C(0) \neq 0$ и в соответствии с первым законом коммутации

$$\left. \frac{du_C}{dt} \right|_0 = \frac{i(0)}{C} = 0, \text{ запишем для } t=0 \text{ два уравнения:}$$

$$u_C(0) - U_0 = A_1 + A_2;$$

$$0 = p_1 A_1 + p_2 A_2,$$

решая которые, получим

$$A_1 = (U_0 - u_C(0)) \frac{p_2}{p_1 - p_2}; \quad A_2 = (U_0 - u_C(0)) \frac{p_1}{p_2 - p_1}.$$

Таким образом,

$$u_C(t) = U_0 + (U_0 - u_C(0)) \left(\frac{p_2}{p_1 - p_2} e^{p_1 t} - \frac{p_1}{p_1 - p_2} e^{p_2 t} \right).$$

Тогда ток в цепи

$$i(t) = C \frac{du_C}{dt} = C(U_0 - u_C(0)) \frac{p_1 p_2}{p_1 - p_2} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) = (U_0 - u_C(0)) \frac{e^{p_1 t} - e^{p_2 t}}{L(p_1 - p_2)}$$

и напряжение на катушке индуктивности

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} = (U_0 - u_C(0)) \frac{p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t}}{p_1 - p_2}.$$

На рис. 1.54 представлены качественные кривые $u_C(t)$, $i(t)$ и $u_L(t)$, соответствующие апериодическому переходному процессу при $u_C(0) = 0$.

Для критического режима на основании (1.14) и (1.16) можно записать:

$$u_C(t) = U_0 + (A_1 + A_2 t) e^{pt}.$$

При $t = 0$

$$u_C(0) - U_0 = A_1;$$

$$pA_1 + A_2 = 0.$$

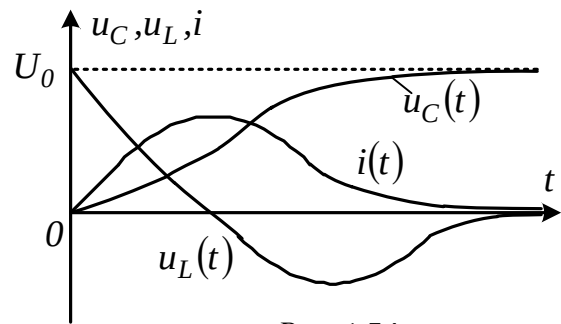


Рис. 1.54

Таким образом,

$$u_C(t) = U_0 + (U_0 - u_C(0)) \left(1 + \frac{R}{2L} t \right) e^{pt}$$

и

$$i(t) = C \frac{du_C}{dt} = (A_2 e^{pt} + pA_1 e^{pt} + pA_2 t e^{pt}) = CpA_2 t e^{pt} = \frac{U_0 - u_C(0)}{L} t e^{-\frac{R}{2L} t}.$$

Для колебательного переходного процесса в соответствии с (1.14) и (1.17) имеем

$$u_C(t) = U_0 + A e^{-\delta t} \sin(\omega_0 t + \varphi).$$

Для нахождения постоянных интегрирования запишем ($t = 0$)

$$u_C(0) - U_0 = A \sin \varphi;$$

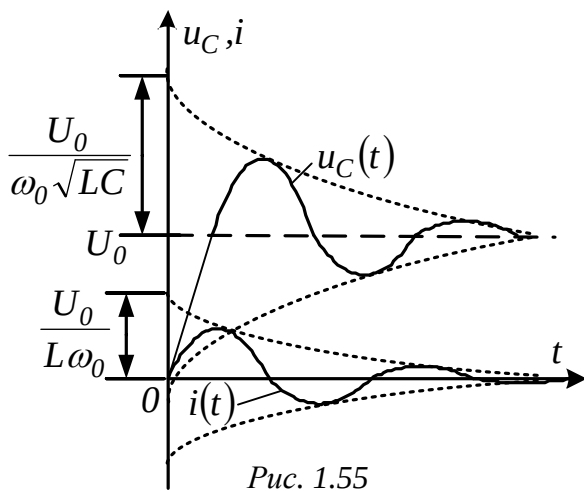
$$0 = -\delta A \sin \varphi + A \omega_0 \cos \varphi,$$

откуда $A = (u_C(0) - U_0) / \sin \varphi$ и $\operatorname{tg} \varphi = \omega_0 / \delta$.

Тогда

$$\begin{aligned} u_C(t) &= U_0 + \frac{u_C(0) - U_0}{\sin \varphi} e^{-\delta t} (\sin \omega_0 t \cos \varphi + \cos \omega_0 t \sin \varphi) = U_0 + (u_C(0) - U_0) e^{-\delta t} \times \\ &\times \left(\frac{\delta}{\omega_0} \sin \omega_0 t + \cos \omega_0 t \right) = U_0 + \frac{u_C(0) - U_0}{\omega_0} e^{-\delta t} \sqrt{\omega_0^2 + \delta^2} \sin \left(\omega_0 t + \operatorname{arctg} \frac{\omega_0}{\delta} \right) = \\ &= U_0 + \frac{u_C(0) - U_0}{\sqrt{LC} \omega_0} e^{-\delta t} \sin \left(\omega_0 t + \operatorname{arctg} \frac{\omega_0}{\delta} \right). \end{aligned}$$

На рис. 1.55 представлены качественные кривые $u_C(t)$ и $i(t)$,



соответствующие колебательному переходному процессу при $u_C(0) = 0$.

При подключении $R-L-C$ цепи к источнику синусоидального напряжения для нахождения принужденных составляющих тока в цепи и напряжения на конденсаторе следует воспользоваться символическим методом расчета, в соответствии с которым

$$\dot{I}_{нпр} = \frac{\dot{U}_m}{\underline{Z}} = \frac{U_m e^{j\varphi_U}}{R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C}} = I_m e^{j(\varphi_U - \varphi)}$$

и

$$\dot{U}_{Cnpm} = -j \frac{1}{\omega C} \dot{I}_{npm} = \frac{I_m}{\omega C} e^{j\left(\varphi_U - \varphi - \frac{\pi}{2}\right)} = U_{Cm} e^{j\left(\varphi_U - \varphi - \frac{\pi}{2}\right)},$$

где $I_m = U_m / \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$; $\varphi = \arctg(\omega L - 1/\omega C)/R$;
 $U_{Cm} = I_m / (\omega C)$.

Таким образом,

$$i_{np}(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi_U - \varphi) \quad \text{и} \quad u_{Cnp}(t) = U_{Cm} \sin\left(\omega t + \varphi_U - \varphi - \frac{\pi}{2}\right).$$

Здесь также возможны три режима:

- | | | |
|-------------------|-------------------------|-------------------------------------|
| 1. $R > R_{кр}$; | 2. $R = R_{кр}$; | 3. $R < R_{кр}$; |
| $p_1 \neq p_2$. | $p_1 = p_2 = -\delta$. | $p_{1,2} = -\delta \pm j\omega_0$. |

Наибольший интерес представляет третий режим, связанный с появлением во время переходного процесса собственных колебаний с частотой ω_0 . При этом возможны, в зависимости от соотношения частот собственных колебаний и напряжения источника, три характерные варианта: 1 – $\omega \gg \omega_0$; 2 – $\omega \ll \omega_0$; 3 – $\omega = \omega_0$, – которые представлены на рис. 1.56, а, б, в соответственно.

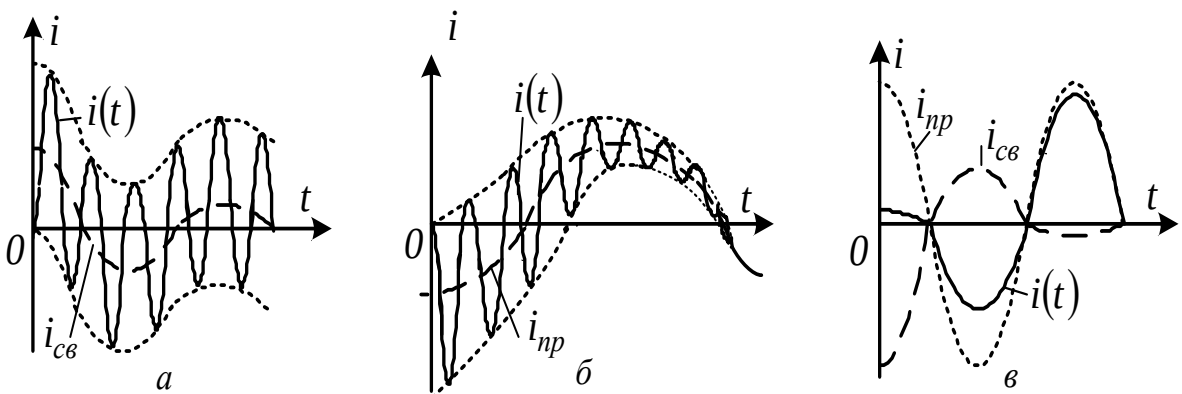


Рис. 1.56

ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

Сущность операторного метода заключается в том, что функции $f(t)$ вещественной переменной t , которую называют **оригиналом**, ставится в соответствие функция $F(p)$ комплексной переменной $p = s + j\omega$, которую называют **изображением**. В результате этого производные и интегралы от оригиналов заменяются алгебраическими функциями от соответствующих изображений (дифференцирование заменяется умножением на оператор p , а интегрирование – делением на него), что, в свою очередь, определяет переход от системы интегро-дифференциальных уравнений к системе алгебраических уравнений относительно изображений искомых переменных. При решении этих уравнений находятся изображения и далее путем обратного перехода – оригиналы. Важнейшим моментом при этом в практическом плане

является необходимость определения только независимых начальных условий, что существенно облегчает расчет переходных процессов в цепях высокого порядка по сравнению с классическим методом.

Изображение $F(p)$ заданной функции $f(t)$ определяется в соответствии с **прямым преобразованием Лапласа**:

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt. \quad (1.18)$$

В сокращенной записи соответствие между изображением и оригиналом обозначается как

$$F(p) \stackrel{\bullet}{=} f(t) \quad \text{или} \quad F(p) = L\{f(t)\}.$$

Следует отметить, что если оригинал $f(t)$ увеличивается с ростом t , то для сходимости интеграла (1.18) необходимо более быстрое убывание модуля e^{-St} . Функции, с которыми встречаются на практике при расчете переходных процессов, этому условию удовлетворяют.

В качестве примера в табл. 1.6 приведены изображения некоторых характерных функций, часто встречающихся при анализе нестационарных режимов.

Таблица 1.6. **Изображения типовых функций**

Оригинал $f(t)$	A	$e^{\alpha t}$	$\sin \omega t$	$\cos \omega t$	$sh \alpha t$	$ch \alpha t$
Изображение $F(p)$	$\frac{A}{p}$	$\frac{1}{p - \alpha}$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	$\frac{\alpha}{p^2 - \alpha^2}$	$\frac{p}{p^2 - \alpha^2}$

Некоторые свойства изображений

1. Изображение суммы функций равно сумме изображений слагаемых:

$$\sum_{k=1}^n f_k(t) \stackrel{\bullet}{=} \sum_{k=1}^n F_k(p).$$

2. При умножении оригинала на коэффициент, на тот же коэффициент умножается изображение:

$$A f(t) \stackrel{\bullet}{=} A F(p).$$

С использованием этих свойств и данных табл. 1.6 можно показать, например, что

$$U_0 (1 - e^{-\alpha t}) \stackrel{\bullet}{=} \frac{U_0}{p} - \frac{U_0}{p + \alpha}.$$

Изображения производной и интеграла

В курсе математики доказывается, что если $f(t) \stackrel{\bullet}{=} F(p)$, то $df/dt \stackrel{\bullet}{=} pF(p) - f(0)$, где $f(0)$ – начальное значение функции $f(t)$.

Таким образом, для напряжения на индуктивном элементе можно записать:

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} \stackrel{\bullet}{=} LpI(p) - Li(0)$$

или при нулевых начальных условиях

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} \stackrel{\bullet}{=} LpI(p).$$

Отсюда **операторное сопротивление катушки индуктивности**

$$Z(p) = Lp.$$

Аналогично для интеграла: если $f(t) \stackrel{\bullet}{=} F(p)$, то $\int_0^t f(t)dt \stackrel{\bullet}{=} \frac{F(p)}{p}$.

С учетом ненулевых начальных условий для напряжения на конденсаторе можно записать:

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i dt + u_C(0).$$

Тогда

$$u_C(t) \stackrel{\bullet}{=} \frac{I(p)}{Cp} + \frac{u_C(0)}{p}$$

или при нулевых начальных условиях

$$u_C(t) \stackrel{\bullet}{=} \frac{1}{Cp} I(p),$$

откуда **операторное сопротивление конденсатора**

$$Z(p) = \frac{1}{Cp}.$$

Закон Ома в операторной форме

Пусть имеем некоторую ветвь $m-n$ (см. рис. 1.57), выделенную из некоторой сложной цепи. Замыкание ключа во внешней цепи приводит к переходному процессу, при этом начальные условия для тока в ветви и напряжения на конденсаторе в общем случае ненулевые.

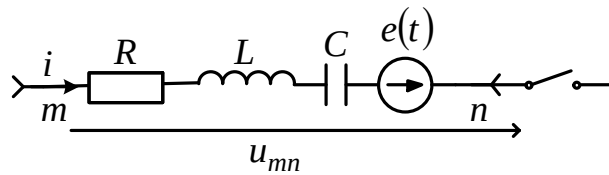


Рис. 1.57

Для мгновенных значений переменных можно записать:

$$u_{mn}(t) = iR + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i dt + u_C(0) - e(t).$$

Тогда на основании приведенных выше соотношений получим

$$U_{mn}(p) = I(p) \left(R + Lp + \frac{1}{Cp} \right) - Li(0) + \frac{u_C(0)}{p} - E(p).$$

Отсюда

$$I(p) = \frac{U_{mn}(p) + Li(0) - \frac{u_C(0)}{p} + E(p)}{Z(p)}, \quad (1.19)$$

где $Z(p) = R + Lp + \frac{1}{Cp}$ – операторное сопротивление рассматриваемого участка цепи.

Следует обратить внимание, что операторное сопротивление $Z(p)$ соответствует комплексному сопротивлению $\underline{Z}(j\omega)$ ветви в цепи синусоидального тока при замене оператора p на $j\omega$.

Уравнение (1.19) есть математическая запись закона Ома для участка цепи с источником ЭДС в операторной форме. В соответствии с ним для ветви на рис. 1.57 можно нарисовать **операторную схему замещения**, представленную на рис. 1.58.

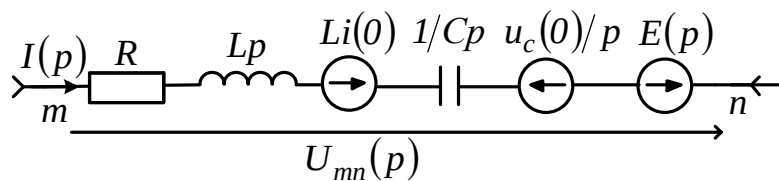


Рис. 1.58

Законы Кирхгофа в операторной форме

Первый закон Кирхгофа: алгебраическая сумма изображений токов, сходящихся в узле, равна нулю:

$$\sum_{\kappa=1}^n I_{\kappa}(p) = 0.$$

Второй закон Кирхгофа: алгебраическая сумма изображений ЭДС, действующих в контуре, равна алгебраической сумме изображений напряжений на пассивных элементах этого контура:

$$\sum_{\kappa=1}^m E_{\kappa}(p) = \sum_{\kappa=1}^m U_{\kappa}(p).$$

При записи уравнений по второму закону Кирхгофа следует помнить о необходимости учета ненулевых начальных условий (если они имеют место). С их учетом последнее соотношение может быть переписано в развернутом виде:

$$\sum_{\kappa=1}^m \left(E_{\kappa}(p) + L_{\kappa} i_{\kappa}(0) - \frac{u_{C\kappa}(0)}{p} \right) = \sum_{\kappa=1}^m \left(R + Lp + \frac{1}{Cp} \right) I_{\kappa}(p).$$

В качестве примера запишем выражение для изображений токов в цепи на рис. 1.59 для двух случаев: 1 – $u_C(0) = 0$; 2 – $u_C(0) \neq 0$.

В первом случае в соответствии с законом Ома

$$I_1(p) = \frac{U_0(p)}{R_2 + \frac{1}{Cp}} = \frac{U_0(1 + R_2 Cp)}{p(R_1 R_2 Cp + R_1 + R_2)}.$$

Тогда

$$I_2(p) = I_1(p) \frac{1}{R_2 Cp + 1} = \frac{U_0}{p(R_1 R_2 Cp + R_1 + R_2)};$$

$$I_3(p) = I_1(p) \frac{R_2 Cp}{R_2 Cp + 1} = \frac{U_0 R_2 C}{R_1 R_2 Cp + R_1 + R_2}.$$

Во втором случае, т.е. при $u_C(0) \neq 0$, для цепи на рис. 1.59 следует составить операторную схему замещения, которая приведена на рис. 1.60. Изображения токов в ней могут быть определены любым методом расчета линейных цепей, например методом контурных токов:

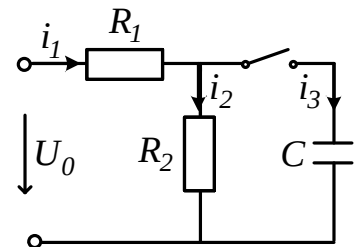


Рис. 1.59

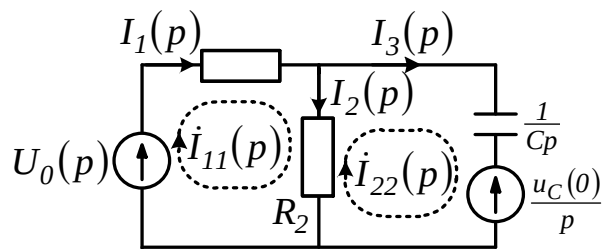


Рис. 1.60

$$I_{11}(p)(R_1 + R_2) - I_{22}(p)R_2 = \frac{U_0}{p};$$

$$-I_{11}(p)R_2 + I_{22}\left(R_2 + \frac{1}{Cp}\right) = -\frac{u_C(0)}{p},$$

откуда $I_1(p) = I_{11}(p)$; $I_2(p) = I_{11}(p) - I_{22}(p)$ и $I_3(p) = I_{22}(p)$.

Переход от изображений к оригиналам

Переход от изображения искомой величины к оригиналу может быть осуществлен следующими способами:

1. Посредством **обратного преобразования Лапласа**

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(p)e^{pt} dp,$$

которое представляет собой решение интегрального уравнения (1.18) и сокращенно записывается как

$$f(t) = L^{-1}\{F(p)\}.$$

На практике этот способ применяется редко.

2. По **таблицам соответствия** между оригиналами и изображениями.

В специальной литературе имеется достаточно большое число формул соответствия, охватывающих практически все задачи электротехники. Согласно данному способу необходимо получить изображение искомой величины в виде, соответствующем табличному, после чего выписать из таблицы выражение оригинала.

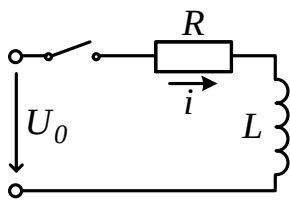


Рис. 1.61

Например, для изображения тока в цепи на рис. 1.61 можно записать:

$$I(p) = \frac{U_0(p)}{Z(p)} = \frac{U_0}{p(R + pL)} = \frac{U_0}{R} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p + \frac{R}{L}} \right).$$

Тогда в соответствии с данными табл. 1

$$i(t) = \frac{U_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right),$$

что соответствует известному результату.

3. С использованием **формулы разложения**.

Пусть изображение $F(p)$ искомой переменной определяется отношением двух полиномов:

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots a_1 p + a_0},$$

где $m < n$.

Это выражение может быть представлено в виде суммы простых дробей:

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{p - p_k}, \quad (1.20)$$

где p_k – k -й корень уравнения $F_2(p) = 0$.

Для определения коэффициентов A_k умножим левую и правую части соотношения (1.20) на $(p - p_k)$:

$$(p - p_k) \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \frac{A_i}{p - p_i} + A_k = \frac{F_1(p)(p - p_k)}{F_2(p)}.$$

При $p \rightarrow p_k$

$$A_k = F_1(p_k) \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{p - p_k}{F_2(p)}.$$

Рассматривая полученную неопределенность типа $0/0$ по правилу Лопиталя, запишем:

$$A_k = F_1(p_k) \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{\frac{d}{dp}(p - p_k)}{F_2'(p)} = \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)}.$$

Таким образом,

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} \frac{1}{p - p_k}.$$

Поскольку отношение $\frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)}$ есть постоянный коэффициент, то

учитывая, что $e^{\alpha t} = \frac{1}{p - \alpha}$, окончательно получаем

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k t}. \quad (1.21)$$

Соотношение (1.21) представляет собой формулу разложения. Если один из корней уравнения $F_2(p) = 0$ равен нулю, т.е. $F_2(p) = p F_3(p)$, то уравнение (1.21) сводится к виду

$$f(t) = \frac{F_1(0)}{F_3(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{p_k F_3'(p_k)} e^{p_k t}. \quad (1.22)$$

В заключение отметим, что для нахождения начального $f(0)$ и конечного $f(\infty)$ значений оригинала можно использовать **предельные соотношения**

$$f(0) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p);$$

$$f(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p),$$

которые также могут служить для оценки правильности полученного изображения.

Некоторые важные замечания к формуле разложения

1. При наличии в цепи синусоидальной ЭДС $e(t) = E_m \sin(\omega t + \varphi)$ для перехода от комплекса к функции времени от правой части формулы разложения берется мнимая часть, т.е. выражение при j . Если при этом в цепи также имеют место другие источники, например постоянной E и экспоненциальной $E_0 e^{-\alpha t}$ ЭДС, и начальные условия для токов в ветвях с индуктивными элементами и напряжений на конденсаторах ненулевые, то они должны быть все введены в формулу предварительно умноженными на j , поскольку только в этом случае они будут учтены при взятии мнимой части от формулы разложения, т.е.

$$i(p) = \frac{\frac{E_m e^{j\varphi}}{p - j\omega} + j \left(\frac{E}{p} + \frac{E_0}{p + \alpha} + Li(0) - \frac{u_C(0)}{p} \right)}{Z(p)}.$$

2. Принужденной составляющей от действия источника синусоидальной ЭДС в формуле разложения соответствует слагаемое, определяемое корнем $p = j\omega$. Для сложных схем такое ее вычисление может оказаться достаточно трудоемким, в связи с чем принужденную составляющую в этих случаях целесообразно определять отдельно символическим методом, а свободную – операторным.

3. Комплексно-сопряженным корням уравнения $F_2(p) = 0$ в формуле разложения соответствуют комплексно-сопряженные слагаемые, которые в сумме дают удвоенный вещественный член, т.е. для k -й пары комплексно-сопряженных корней имеет место

$$f_k(t) = 2 \operatorname{Re} \left(\frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k t} \right).$$

Последовательность расчета переходных процессов операторным методом

1. Определение независимых начальных условий путем расчета докоммутационного режима работы цепи.
2. Составление операторной схемы замещения цепи (для простых цепей с нулевыми начальными условиями этот этап может быть опущен).
3. Запись уравнений по законам Кирхгофа или другим методам расчета линейных цепей в операторной форме с учетом начальных условий.
4. Решение полученных уравнений относительно изображений искомых величин.
5. Определение оригиналов (с помощью формулы разложения или таблиц соответствия оригиналов и изображений) по найденным изображениям.

В качестве примера использования операторного метода определим ток через катушку индуктивности в цепи на рис. 1.62.

С учетом нулевого начального условия операторное изображение этого тока

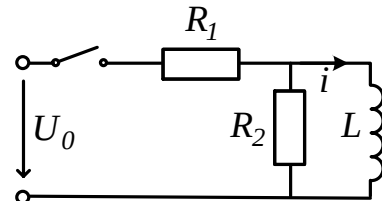


Рис. 1.62

$$I(p) = \frac{U_0(p)}{R_1 + \frac{R_2 pL}{R_2 + pL}} \cdot \frac{R_2}{R_2 + pL} = \frac{U_0 R_2}{p(R_1 R_2 + (R_1 + R_2)pL)}.$$

Для нахождения оригинала $i(t)$ воспользуемся формулой разложения при нулевом корне:

$$i(t) = \frac{F_1(0)}{F_3(0)} + \frac{F_1(p_1)e^{p_1 t}}{p_1 F_3'(p_1)}, \quad (1.23)$$

где $F_1(p) = U_0 R_2$, $F_3(p) = R_1 R_2 + (R_1 + R_2)pL$.

Корень уравнения $F_3(p) = 0$

$$p_1 = -\frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)L}.$$

Тогда

$$p_1 F_3'(p_1) = -\frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)L} \cdot (R_1 + R_2)L = -R_1 R_2$$

и

$$\frac{F_1(0)}{F_3(0)} = \frac{U_0 R_2}{R_1 R_2} = \frac{U_0}{R_1}.$$

Подставляя найденные значения слагаемых формулы разложения в (1.23), получим

$$i(t) = \frac{U_0}{R_1} - \frac{U_0}{R_1} e^{-\frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)L} t}.$$

Воспользовавшись предельными соотношениями, определим $i(0)$ и $i(\infty)$:

$$i(0) = \lim_{p \rightarrow \infty} pI(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{U_0 R_2}{R_1 R_2 + (R_1 + R_2)Lp} = 0;$$

$$i(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} pI(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{U_0 R_2}{R_1 R_2 + (R_1 + R_2)Lp} = \frac{U_0}{R_1}.$$

Формулы включения

Формулу разложения можно использовать для расчета переходных процессов при нулевых и ненулевых начальных условиях. Если начальные условия нулевые, то при подключении цепи к источнику постоянного, экспоненциального или синусоидального напряжения для расчета переходных процессов удобно использовать **формулы включения**, вытекающие из формулы разложения.

1. Формула включения на экспоненциальное напряжение $u(t) = U_0 e^{\alpha t}$:

$$i(t) = \frac{U_0 e^{\alpha t}}{Z(\alpha)} + \sum_{k=1}^n \frac{U_0 e^{p_k t}}{(p_k - \alpha) Z'(p_k)}, \quad (1.24)$$

где $Z(p)$ – входное операторное сопротивление двухполюсника при определении тока в ветви с ключом (при расчете тока в произвольной ветви это – операторное сопротивление, определяющее ток в ней по закону Ома); p_k – k -й корень уравнения $Z(p) = 0$.

2. Формула включения на постоянное напряжение U_0 (вытекает из (1.24) при $\alpha = 0$):

$$i(t) = \frac{U_0}{Z(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{U_0 e^{p_k t}}{p_k Z'(p_k)}.$$

3. Формула включения на синусоидальное напряжение $u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi)$ (формально вытекает из (1.24) при $\alpha = j\omega$ и $U_0 = U_m e^{j\varphi}$):

$$i(t) = \operatorname{Im} \left[\frac{U_m e^{j(\omega t + \varphi)}}{Z(j\omega)} + \sum_{k=1}^n \frac{U_m e^{j\varphi}}{(p_k - j\omega) Z'(p_k)} e^{p_k t} \right].$$

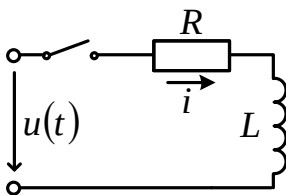


Рис. 1.63

В качестве примера использования формулы включения рассчитаем ток в цепи на рис. 1.63, если в момент времени $t=0$ она подсоединяется к источнику с напряжением $u(t) = 1000e^{-5t}$ В; $R = 10$ Ом; $L = 1$ Гн.

В соответствии с заданной формой напряжения источника для решения следует воспользоваться формулой (1.23). В ней $Z(p) = Lp + R$. Тогда корень уравнения $Z(p) = 0$ $p_1 = -R/L = -10 \text{ с}^{-1}$. Производная $Z'(p) = L = 1 \text{ Гн}$ и $Z(\alpha) = R + L\alpha = 5 \text{ Ом}$.

В результате

$$i(t) = \frac{1000e^{-5t}}{5} + \frac{1000e^{-10t}}{-10 - (-5)} = 200(e^{-5t} - e^{-10t}) \text{ А}.$$

Сведение расчета переходного процесса к расчету с нулевыми начальными условиями

Используя принцип наложения, расчет цепи с ненулевыми начальными условиями можно свести к расчету схемы с нулевыми начальными условиями. Последнюю цепь, содержащую пассивные элементы, можно затем с помощью преобразований последовательно-параллельных соединений и треугольника в звезду и наоборот свести к виду, позволяющему определить искомый ток по закону Ома с использованием формул включения.

Методику сведения цепи к нулевым начальным условиям иллюстрирует рис. 1.64, на котором исходная схема на рис. 1.64,а заменяется эквивалентной ей схемой на рис. 1.64,б, где $e(t) = u_{12}(t)$. Последняя в соответствии с принципом наложения раскладывается на две схемы, при этом в схеме на рис. 1.64,в составляющая i' общего тока i равна нулю. Таким образом, полный ток i равен составляющей тока i'' в цепи на рис. 1.64,г, где исходный активный двухполюсник АД заменен пассивным ПД, т.е. схема сведена к нулевым начальным условиям.

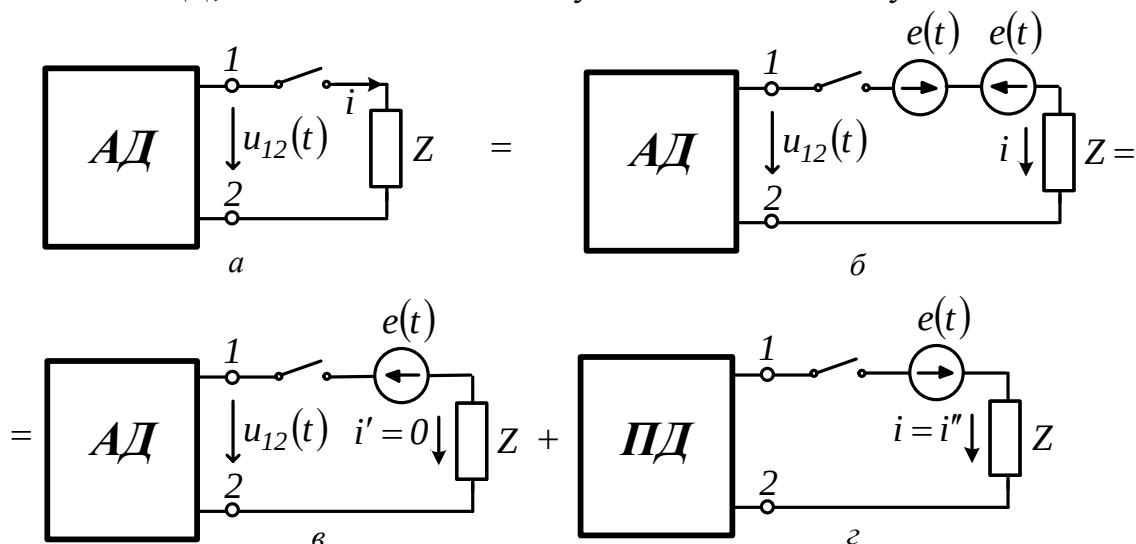


Рис. 1.64

Следует отметить, что если определяется ток в ветви с ключом, то достаточно рассчитать схему на рис. 1.64,г. При расчете тока в какой-либо другой ветви АД в соответствии с вышесказанным он будет складываться

из тока в этой ветви до коммутации и тока в ней, определяемого подключением ЭДС $e(t)$ к пассивному двухполюснику.

Аналогично можно показать, что отключение ветви, не содержащей индуктивных элементов, при расчете можно имитировать включением в нее источника тока, величина которого равна току в ветви до коммутации и который действует навстречу ему.

МЕТОД ПЕРЕМЕННЫХ СОСТОЯНИЯ

Уравнения электромагнитного состояния – это система уравнений, определяющих режим работы (состояние) электрической цепи.

Метод переменных состояния основывается на упорядоченном составлении и решении системы дифференциальных уравнений первого порядка, которые разрешены относительно производных, т.е. записаны в виде, наиболее удобном для применения численных методов интегрирования, реализуемых средствами вычислительной техники.

Количество переменных состояния, а следовательно, число уравнений состояния равно числу независимых накопителей энергии.

К уравнениям состояния выдвигаются два основных требования:

- независимость уравнений;
- возможность восстановления на основе переменных состояния (переменных, относительно которых записаны уравнения состояния) любых других переменных.

Первое требование удовлетворяется специальной методикой составления уравнений состояния, которая будет рассмотрена далее.

Для выполнения второго требования в качестве переменных состояния следует принять потокосцепления (токи в ветвях с индуктивными элементами) и заряды (напряжения) на конденсаторах. Действительно, зная закон изменения этих переменных во времени, их всегда можно заменить источниками ЭДС и тока с известными параметрами. Остальная цепь оказывается резистивной, а следовательно, всегда рассчитывается при известных параметрах источников. Кроме того, начальные значения этих переменных относятся к независимым, т.е. в общем случае рассчитываются проще других.

При расчете методом переменных состояния, кроме самих уравнений состояния, связывающих первые производные $d\psi/dt$ (di_L/dt) и dq/dt (du_C/dt) с самими переменными ψ (i_L) и q (u_C) и источниками внешних воздействий – ЭДС и тока, необходимо составить систему алгебраических уравнений, связывающих искомые величины с переменными состояния и источниками внешних воздействий.

Таким образом, полная система уравнений в матричной форме записи имеет вид

$$\tilde{O}' = A\tilde{O} + BU; \quad (1.25)$$

$$Y = CX + DU. \quad (1.26)$$

Здесь X и X' – столбцовые матрицы соответственно переменных состояния и их первых производных по времени; U – матрица-столбец источников внешних воздействий; Y – столбцовая матрица выходных (искомых) величин; A – квадратная размерностью $n \times n$ (где n – число переменных состояния) матрица параметров, называемая матрицей Якоби; B – прямоугольная матрица связи между источниками и переменными состояния (количество строк равно n , а столбцов – числу источников m); C – прямоугольная матрица связи переменных состояния с искомыми величинами (количество строк равно числу искомых величин k , а столбцов – n); D – прямоугольная размерностью $k \times m$ матрица связи входа с выходом.

Начальные условия для уравнения (1.25) задаются вектором начальных значений $X(0)$.

Методика составления уравнений состояния на основе принципа наложения

Первый этап данной методики заключается в замене на основании теоремы о компенсации всех конденсаторов источниками напряжения, а всех катушек индуктивности – источниками тока. В результате исходная цепь трансформируется в резистивную, в которой помимо заданных источников действуют также вновь введенные источники.

На втором этапе с использованием метода наложения определяются выражения производных переменных состояния, а также искомых величин через напряжения и токи всех источников.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Первому уровню сложности соответствуют примеры 1.1, 1.2 и 1.3, а второму – 1.4.

Пример 1.1

В цепи на рис. 1.65 $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 100 \text{ Ом}$, $E = 150 \text{ В}$, $L = 1 \text{ мГн}$, $C = 100 \text{ мкФ}$.

Определить зависимости $u_C(t)$, $i_L(t)$ и $i_1(t)$ после замыкания ключа.

Решение

1. Ищем решение для $u_C(t)$ в виде

$$u_C(t) = u_{C\text{ст}} + u_{C\text{св}}.$$

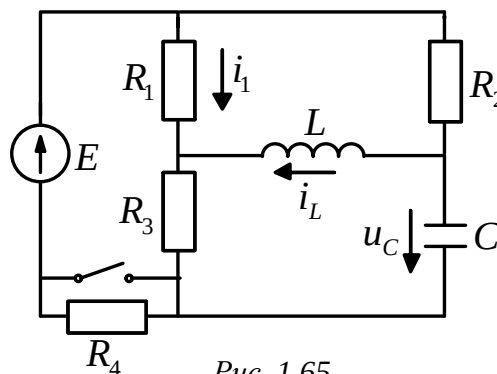


Рис. 1.65

2. Принужденная составляющая напряжения

$$u_{C\dot{\delta}} = \frac{ER_3}{\frac{R_1R_2}{R_1 + R_2} + R_3} = 100 \text{ В}.$$

3. Выражение входного сопротивления цепи относительно места разрыва ветви с индуктивным элементом запишем следующим образом:

$$Z(p) = Lp + \frac{R_1R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2 \frac{1}{Cp}}{R_2 + \frac{1}{Cp}},$$

откуда характеристическое уравнение имеет вид

$$L(R_1 + R_3)R_2Cp^2 + (L(R_1 + R_3) + R_1R_2R_3C)p + R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3 = 0$$

или после подстановки численных значений параметров –

$$2p^2 + 300p + 30000 = 0.$$

Корни уравнения

$$p_{1,2} = -75 \pm j97,$$

чему соответствует выражение свободной составляющей

$$u_{C\ddot{\alpha}} = e^{-75t} (A_1 \sin 97t + A_2 \cos 97t) \text{ В}.$$

Таким образом,

$$u_C(t) = 100 + e^{-75t} (A_1 \sin 97t + A_2 \cos 97t) \text{ В}.$$

4. Уравнения для нахождения постоянных интегрирования имеют вид

$$u_C(0) = 100 + A_2; \quad (1.27)$$

$$\left. \frac{du_C}{dt} \right|_0 = 97 \dot{A}_1 - 75 \dot{A}_2. \quad (1.28)$$

Расчет начальных условий начнем с определения $i_L(0)$ и $u_C(0)$ по схеме на рис. 1.66,а, из которой имеем

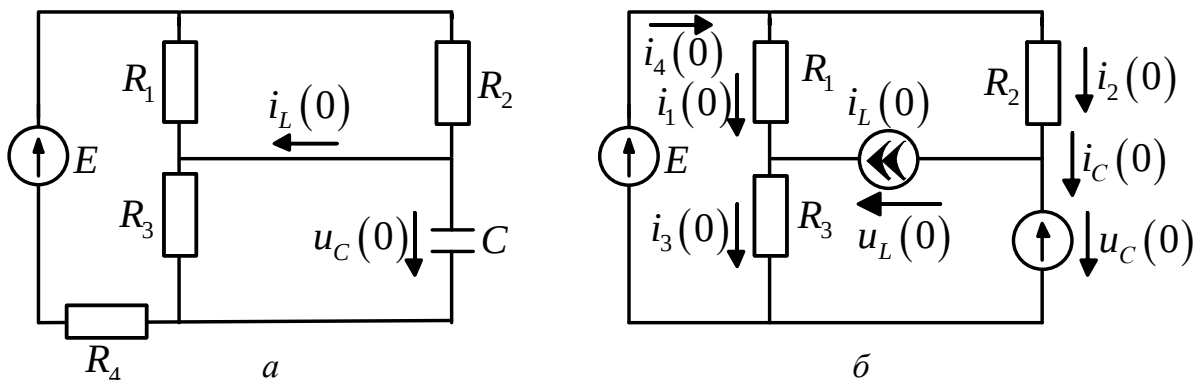


Рис. 1.66

$$i_L(0) = \frac{E}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3 + R_4} \left(1 - \frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) = 0,3 \text{ A};$$

$$u_C(0) = \frac{ER_3}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3 + R_4} = 60 \text{ В}.$$

Для расчета $(du_C/dt)_0$ и $(di_L/dt)_0$ воспользуемся схемой на рис. 1.66,б, где катушка индуктивности заменена источником тока $i_L(0)$, а конденсатор – источником напряжения $u_C(0)$. Для данной схемы справедлива система уравнений

$$i_4(0) - i_1(0) - i_2(0) = 0;$$

$$i_1(0) + i_L(0) - i_3(0) = 0;$$

$$i_2(0) - i_L(0) - i_N(0) = 0;$$

$$R_1 i_1(0) + R_3 i_3(0) = E;$$

$$R_2 i_2(0) + u_C(0) = E;$$

$$R_3 i_3(0) + u_L(0) = u_C(0),$$

решая которую относительно $i_C(0)$ и $u_L(0)$, получаем: $i_C(0) = 0,6 \text{ A}$, $u_L(0) = -30 \text{ В}$. Из последнего вытекает:

$$\left. \frac{du_C}{dt} \right|_0 = \frac{i_C(0)}{C} = 6 \cdot 10^3 \text{ В/с};$$

$$\left. \frac{di_L(0)}{dt} \right|_0 = \frac{u_L(0)}{L} = -30 \text{ А/с}.$$

Решив с использованием рассчитанных начальных условий уравнения (1.27), (1.28), получим: $A_1 = 31 \text{ В}$, $A_2 = -40 \text{ В}$.

Таким образом,

$$\begin{aligned} u_C(t) &= 100 + e^{-75t} (31 \sin 97t - 40 \cos 97t) = \\ &= 100 + 50,6 e^{-75t} \sin(97t - 52,2^\circ) \text{ В}. \end{aligned}$$

5. Решение для тока в ветви с индуктивным элементом ищем в виде

$$i_L(t) = i_{Li\delta} + i_{Li\hat{a}},$$

где

$$i_{Li\delta} = \frac{E}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3} \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 0,5 \text{ А}.$$

6. Выражение свободной составляющей запишем в виде

$$i_{L\hat{n}\hat{a}} = e^{-75t} (B_1 \sin 97t + B_2 \cos 97t) \text{ A.}$$

Таким образом,

$$i_L(t) = 0,5 + e^{-75t} (B_1 \sin 97t + B_2 \cos 97t) \text{ A.}$$

7. Постоянные интегрирования находим из уравнений

$$i_L(0) = 0,5 + B_2 = 0,3 \text{ A};$$

$$\left. \frac{di_L}{dt} \right|_0 = 97B_1 - 75B_2 = -30 \text{ A/C},$$

решая которые, получаем: $B_1 = -0,464 \text{ A}$, $B_2 = -0,2 \text{ A}$.

Следовательно,

$$\begin{aligned} i_L(t) &= 0,5 + e^{-75t} (-0,464 \sin 97t - 0,2 \cos 97t) = \\ &= 0,5 + 0,505 e^{-75t} \sin(97t + 203^\circ) \text{ A.} \end{aligned}$$

8. Для определения тока $i(t)$ составим уравнение по второму закону Кирхгофа для контура $E - R_1 - L - C$:

$$R_1 i_1 - L \frac{di_L}{dt} + u_C = E.$$

Решая его относительно $i_1(t)$, получаем

$$\begin{aligned} i_1(t) &= \frac{E + L \frac{di_L}{dt} - u_C}{R} = \\ &= \frac{150 + 1 \frac{d}{dt} (0,5 + 0,505 e^{-75t} \sin(97t + 203^\circ)) - 100 - 50,6 e^{-75t} \sin(97t - 52,3^\circ)}{100} = \\ &= 0,5 + 0,253 e^{-75t} \sin(97t + 23,3^\circ) \text{ A.} \end{aligned}$$

Пример 1.2

Решить предыдущую задачу операторным методом.

Решение

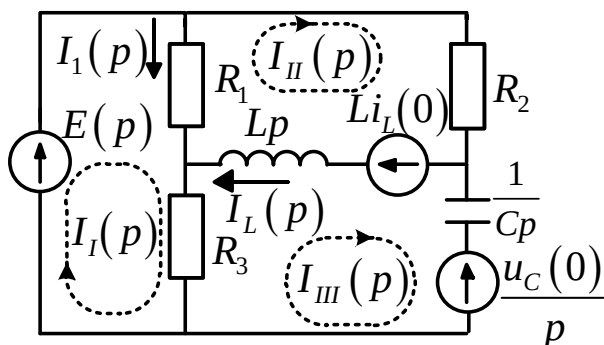


Рис. 1.67

1. В соответствии с определенными в примере 1.1 начальными значениями тока в ветви с индуктивным элементом $i_L(0) = 0,3 \text{ A}$ и напряжения на конденсаторе $u_C(0) = 60 \text{ В}$ расчетная операторная схема замещения приведена на рис. 1.67.

2. Для данной схемы

справедлива следующая система операторных уравнений, записанных по методу контурных токов:

$$\begin{aligned} I_I(p)(R_1 + R_3) - I_{II}(p)R_1 - I_{III}(p)R_3 &= \frac{E}{p}; \\ -I_I(p)R_1 + I_{II}(p)(R_1 + R_2 + Lp) - I_{III}(p)Lp &= Li_L(0); \\ -I_I(p)R_3 - I_{II}(p)Lp + I_{III}(p)\left(R_3 + Lp + \frac{1}{Cp}\right) &= -Li_L(0) - \frac{u_C(0)}{p} \end{aligned}$$

– или после подстановки численных значений входящих в них параметров:

$$\begin{aligned} I_I(p) \cdot 200 - I_{II}(p) \cdot 100 - I_{III}(p) \cdot 100 &= \frac{150}{p}; \\ -I_I(p) \cdot 100 + I_{II}(p) \cdot (200 + p) - I_{III}(p)p &= 0,3; \\ -I_I(p) \cdot 100 - I_{II}(p) \cdot p + I_{III}(p)\left(100 + p + \frac{10^4}{p}\right) &= -0,3 - \frac{60}{p}. \end{aligned}$$

Решением этой системы являются:

$$\begin{aligned} I_I(p) &= 1,5 \frac{p^2 + 120p + 10000}{p(p^2 + 150p + 15000)}; \\ I_{II}(p) &= 0,3 \frac{3p^2 + 250p + 25000}{p(p^2 + 150p + 15000)}; \\ I_{III}(p) &= 0,6 \frac{100 + p}{p^2 + 150p + 15000}, \end{aligned}$$

откуда изображения искоемых переменных

$$\begin{aligned} I_L(p) &= I_I(p) - I_{II}(p) = \frac{0,6p^2 + 105p + 7500}{p(p^2 + 150p + 15000)} = \frac{F_1(p)}{pF_3(p)}; \\ I_L(p) &= I_{II}(p) - I_{III}(p) = \frac{0,3p^2 + 15p + 7500}{p(p^2 + 150p + 15000)} = \frac{F_2(p)}{pF_3(p)}; \\ U_C(p) &= \frac{1}{Cp} I_{III}(p) + \frac{u_C(0)}{p} = \frac{60p^2 + 15000p + 1500000}{p(p^2 + 150p + 15000)} = \frac{F_4(p)}{pF_3(p)}. \end{aligned}$$

Используя формулу разложения (1.22), для которой корни характеристического уравнения $F_3(p) = 0$ – $p_{1,2} = -75 \pm j97$ и $F_3'(p) = 2p + 150$, записываем выражения оригиналов:

$$\begin{aligned} i_I(t) &= \frac{F_1(0)}{F_3(0)} + 2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{F_1(p_1)}{p_1 F_3'(p_1)} e^{p_1 t} \right\} = 0,5 + 0,253 e^{-75t} \sin(97t + 23,3^\circ) \text{ A}; \\ i_L(t) &= \frac{F_2(0)}{F_3(0)} + 2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{F_2(p_1)}{p_1 F_3'(p_1)} e^{p_1 t} \right\} = 0,5 + 0,505 e^{-75t} \sin(97t + 203^\circ) \text{ A}; \end{aligned}$$

$$u_C(t) = \frac{F_4(0)}{F_3(0)} + 2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{F_4(p_1)}{p_1 F_3'(p_1)} e^{p_1 t} \right\} = 100 + 50,6 e^{-75t} \sin(97t - 52,2^\circ) \text{ В}.$$

Как видно, полученные зависимости совпадают с результатом решения задачи классическим методом.

Пример 1.3

В цепи на рис. 1.65 действует источник синусоидально изменяющейся ЭДС $\dot{a}(t) = \sqrt{2} \cdot 150 \sin(314t + \pi/3) \hat{A}$.

Записать для данной схемы уравнения состояния и для численных значений примера 1.1 определить матрицы A , B , C , D и вектор $X(0)$.

Решение

1. Векторы X и Y для данной схемы запишем в виде

$$X = [u_{\tilde{N}} \quad i_L]^T;$$

$$Y = [u_{\tilde{N}} \quad i_L \quad i_1]^T.$$

Тогда уравнения состояния имеют вид

$$\begin{bmatrix} \frac{du_{\tilde{N}}}{dt} \\ \frac{di_L}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{a}_{11} & \dot{a}_{12} \\ \dot{a}_{21} & \dot{a}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{\tilde{N}} \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix} \dot{a}(t); \quad (1.29)$$

$$\begin{bmatrix} u_{\tilde{N}} \\ i_L \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{n}_{11} & \tilde{n}_{12} \\ \tilde{n}_{21} & \tilde{n}_{22} \\ \tilde{n}_{31} & \tilde{n}_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{\tilde{N}} \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} \\ d_{21} \\ d_{31} \end{bmatrix} \dot{a}(t). \quad (1.30)$$

2. Для нахождения элементов матриц A , B , C и D заменим катушку индуктивности в коммутационной цепи на источник тока i_L , а конденсатор – на источник ЭДС $u_{\tilde{N}}$. В результате получим резистивную схему на рис. 1.68.

Используя принцип суперпозиции, рассмотрим три частичные схемы, в каждой из которых действует только один источник ЭДС или тока.

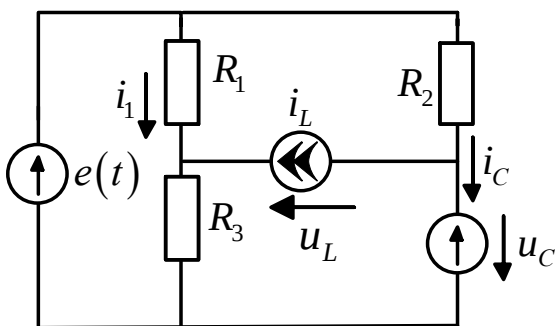


Рис. 1.68

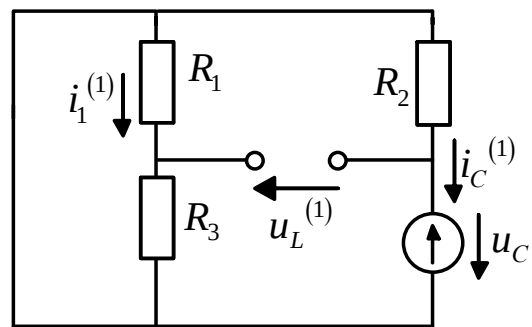


Рис. 1.69

3. Первая частичная схема приведена на рис. 1.69. В ней оставляем только источник ЭДС, соответствующий напряжению $u_{\tilde{N}}$ на конденсаторе.

Из анализа схемы следует, что $i_{\tilde{N}}^{(1)} = u_{\tilde{N}}/R_2$; $u_L^{(1)} = u_{\tilde{N}}$; $i_1^{(1)} = 0$ или

$$\tilde{n} \left(\frac{du_{\tilde{N}}}{dt} \right)^{(1)} = -\frac{1}{R_2} u_{\tilde{N}}; \quad L \left(\frac{di_L}{dt} \right)^{(1)} = u_{\tilde{N}}.$$

Отсюда получаем $\dot{a}_{11} = -1/(R_2 \tilde{N})$; $\dot{a}_{21} = -1/L$; $\tilde{n}_{31} = 0$.

4. Вторая частичная схема представлена на рис. 1.70. В ней оставляем только источник тока, соответствующий току i_L катушки индуктивности.

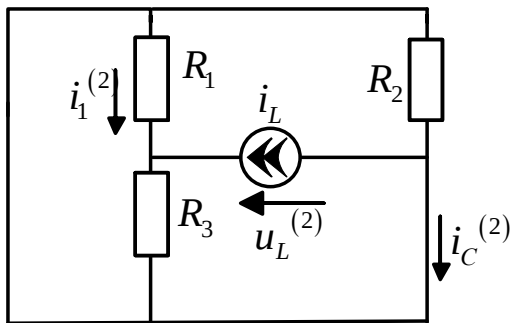


Рис. 1.70

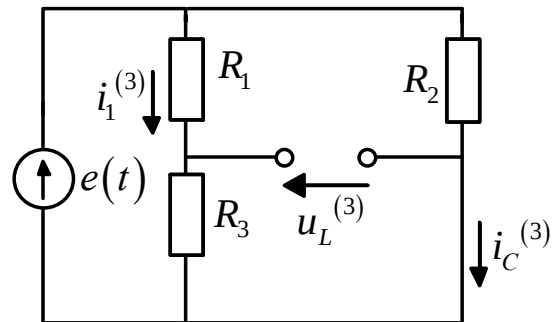


Рис. 1.71

Для этой схемы $i_{\tilde{N}}^{(2)} = -i_L$; $u_L^{(2)} = -R_1 R_3 i_L (R_1 + R_3)$; $i_1^{(2)} = -R_3 i_L (R_1 + R_3)$ или

$$\tilde{n} \left(\frac{du_{\tilde{N}}}{dt} \right)^{(2)} = -i_L;$$

$$L \left(\frac{di_L}{dt} \right)^{(2)} = -\frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} i_L.$$

Отсюда получаем $\dot{a}_{12} = -1/\tilde{N}$; $\dot{a}_{22} = -R_1 R_3 / (L(R_1 + R_3))$; $\tilde{n}_{32} = -R_3 / (R_1 + R_3)$.

5. Третья частичная схема приведена на рис. 1.71. В ней оставляем только источник ЭДС $e(t)$.

Из анализа этой схемы вытекает: $i_{\tilde{N}}^{(3)} = \dot{a}(t)/R_2$; $u_L^{(3)} = -R_3 \dot{a}(t) / (R_1 + R_3)$; $i_1^{(3)} = \dot{a}(t) / (R_1 + R_3)$ или

$$\tilde{n} \left(\frac{du_{\tilde{N}}}{dt} \right)^{(3)} = \frac{1}{R_2} \dot{a}(t);$$

$$L \left(\frac{di_L}{dt} \right)^{(3)} = -\frac{R_3}{R_1 + R_3} \dot{a}(t).$$

Отсюда получаем $b_{11} = -1/(R_2 \tilde{N})$; $b_{21} = -R_3/(L(R_1 + R_3))$;
 $d_{31} = 1/(R_1 + R_3)$.

1. Принимая во внимание, что $\tilde{n}_{11} = \tilde{n}_{22} = 1$; $\tilde{n}_{12} = \tilde{n}_{21} = 0$ и $d_{11} = d_{12} = 0$, имеем

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_2 \tilde{N}} & -\frac{1}{\tilde{N}} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R_1 R_3}{L(R_1 + R_3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -100 & -10000 \\ 1 & -50 \end{bmatrix};$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_2 \tilde{N}} \\ -\frac{R_3}{L(R_1 + R_3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -100 \\ -0,5 \end{bmatrix};$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -\frac{R_3}{R_1 + R_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -0,5 \end{bmatrix};$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{R_1 + R_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,005 \end{bmatrix}.$$

2. Для расчета вектора $X(0)$ начальных значений переменных состояния запишем систему уравнений по методу контурных токов для цепи на рис. 1.72:

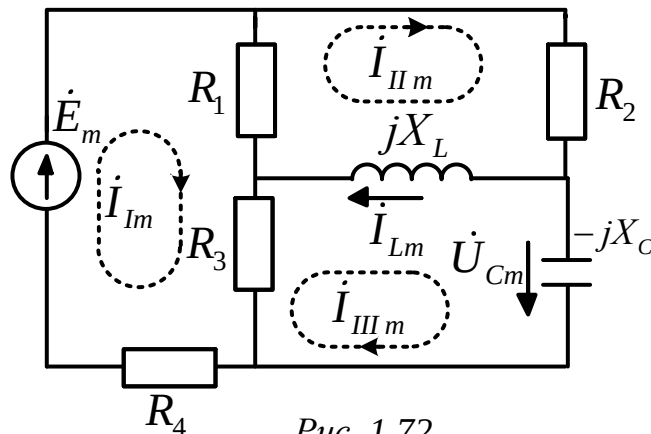


Рис. 1.72

$$\begin{aligned} \dot{I}_{Im}(R_1 + R_3 + R_4) - \dot{I}_{IIm}R_1 - \dot{I}_{IIIm}R_3 &= \hat{A}_m; \\ -\dot{I}_{Im}R_1 + \dot{I}_{IIm}(R_1 + R_2 + jX_L) - \dot{I}_{IIIm}jX_L &= 0; \\ -\dot{I}_{Im}R_3 - \dot{I}_{IIm}jX_L + \dot{I}_{IIIm}(R_3 + jX_L - jX_{\tilde{N}}) &= 0, \end{aligned}$$

где $X_L = \omega L = 314 \cdot 1 = 314 \text{ Ом}$; $X_{\tilde{N}} = 1/(\omega \tilde{N}) = 1/(314 \cdot 10^{-4}) = 31,85 \text{ Ом}$; $\hat{A}_m = \sqrt{2} \cdot 150 e^{j\pi/3} \text{ А}$.

Решая эту систему, получаем $\dot{I}_{Im} = 0,56 + j1,16 \text{ А}$; $\dot{I}_{IIm} = 0,24 + j0,8 \text{ А}$; $\dot{I}_{IIIm} = 0,38 + j0,83 \text{ А}$. Тогда

$$\dot{I}_{Im} = \dot{I}_{IIm} - \dot{I}_{IIIm} = -0,14 - j0,03 \text{ А};$$

$$\dot{U}_{\tilde{N}m} = -jX_{\tilde{N}}\dot{I}_{IIIm} = 26,44 - j12,1 \text{ А}.$$

Отсюда находим $u_{\tilde{N}}(0) = I_m \{\dot{U}_{\tilde{N}m}\} = -12,1 \text{ А}$; $i_L(0) = I_m \{\dot{I}_{Lm}\} = -0,03 \text{ А}$. Таким образом, $X(0) = [-12,1 \quad -0,03]^T$.

Пример 1.4

В цепи на рис. 1.73 $R_1 = 50 \text{ Ом}$; $R_2 = 20 \text{ Ом}$; $R_3 = 80 \text{ Ом}$; $C = 31,85 \text{ мкФ}$.

Найти напряжение $u_{\tilde{N}}(t)$ на конденсаторе после замыкания ключа, если $u(t) = 100 \sin \omega t \text{ В}$ и $f = 50 \text{ Гц}$.

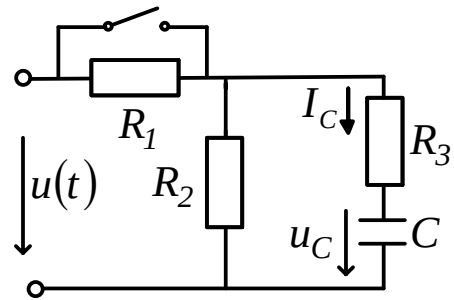


Рис. 1.73

Решение

1. Ищем напряжение на конденсаторе в виде

$$u_{\tilde{N}}(t) = u_{C\tilde{\delta}} + u_{C\tilde{\alpha}}. \quad (1.31)$$

2. Для определения принужденной составляющей напряжения рассчитаем комплекс амплитуды этого напряжения в соответствии с соотношением

$$\dot{U}_{C\tilde{\delta}m} = -jX_C \dot{I}_{C\tilde{\delta}m}, \quad (1.32)$$

где

$$X_C = \frac{1}{2\pi fC} = 100 \text{ Ом};$$

$$\dot{I}_{C\tilde{\delta}m} = \frac{\dot{U}_m}{R_3 - jX_C} = \frac{100}{80 - j100} = 0,78 e^{j51^\circ} \text{ А}.$$

Отсюда

$$\dot{U}_{C\tilde{\delta}m} = 78 e^{-j39^\circ} \text{ В} \quad (1.33)$$

и

$$u_{C\tilde{\delta}} = 78 \sin(\omega t - 39^\circ) \text{ В}.$$

3. Свободную составляющую напряжения на конденсаторе имеем в виде

$$u_{C\tilde{n}\hat{a}} = Ae^{-t/\tau_C} B,$$

где

$$\tau_C = CR_3 = 2,55 \cdot 10^{-3} \text{ с}.$$

Таким образом,

$$u_{C\tilde{n}\hat{a}} = Ae^{-392t} B. \quad (1.34)$$

4. Подставив (1.33) и (1.34) в (1.32), получим:

$$u_{\tilde{N}}(t) = 78 \sin(\omega t - 39^0) + Ae^{-392t} B. \quad (1.35)$$

5. Для определения постоянной интегрирования запишем (1.35) для $t = 0$:

$$u_{\tilde{N}}(0) = 78 \sin(-39^0) + A. \quad (1.36)$$

В соответствии со вторым законом коммутации $u_{\tilde{N}}(0)$ определяется в результате расчета цепи на рис. 1.71 до коммутации. На основании теоремы об активном двухполюснике для тока в ветви с конденсатором можно записать:

$$\dot{I}_{Cm} = \frac{\dot{U}_m \frac{R_2}{R_1 + R_2}}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3 - jX_C} = 0,208e^{j47^0} \text{ А}.$$

Отсюда комплексная амплитуда напряжения на конденсаторе до коммутации

$$\dot{U}_{Cm} = -jX_C \dot{I}_{Cm} = 20,8e^{-j43^0} \text{ В}$$

и, следовательно,

$$u_{\tilde{N}}(0) = 20,8 \sin(-43^0) = -14,2 \text{ В}.$$

Тогда, решив с учетом найденного значения $u_{\tilde{N}}(0)$ уравнение (1.36) относительно постоянной интегрирования, получим

$$\hat{A} = 34,9 \hat{A}.$$

Таким образом, искомое выражение напряжения на конденсаторе имеет вид

$$u_{\tilde{N}}(t) = 78 \sin(\omega t - 39^0) + 34,9e^{-392t} \text{ В}.$$

ЗАДАНИЕ 2. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЦЕПЯХ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Задание 2 имеет два уровня сложности. **Первый уровень** включает в себя задачу по расчету переходных процессов в цепи с распределенными параметрами (рис. 2.1÷2.20), содержащей реактивный элемент (табл. 2.1). **Второму уровню** соответствует задача по расчету переходных процессов в цепи с распределенными параметрами, содержащей только резистивные элементы (рис. 2.21÷2.40) (табл. 2.2).

При выполнении задания **первого уровня** сложности номер схемы берется из табл. 2.1; при выполнении задания **второго уровня** сложности номер схемы берется из табл. 2.2.

Задача. В длинной линии без потерь в момент времени $t=0$ происходит коммутация – включение или отключение источника постоянного напряжения, участка линии или нагрузки. Требуется рассчитать и построить графики распределения тока и напряжения вдоль линий для момента времени t_0 .

Таблица 2.1. Значения параметров электрических цепей для первого уровня

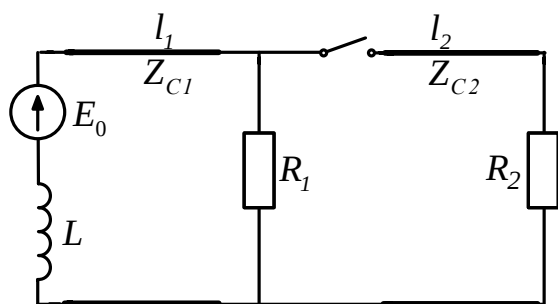
Номер варианта	Номер схемы	E_0 , кВ	Z_{C1} , Ом	Z_{C2} , Ом	l_1 , км	l_2 , км	$V_{\delta 1}$, км/с	$V_{\delta 2}$, км/с	R_1 , Ом	R_2 , Ом	t_0 , мс	L , Гн
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	2.1	100	50	350	45	100	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	100	200	0,5	0,1
2	2.2	150	60	350	45	180	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	150	100	1,1	0,15
3	2.3	200	80	400	60	150	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	200	150	0,7	0,2
4	2.4	250	500	75	180	75	$3 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^5$	120	250	0,8	0,3
5	2.5	300	60	450	40	160	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	150	100	1,0	0,25
6	2.6	150	350	60	120	70	$3 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^5$	150	100	0,6	0,15
7	2.7	200	80	400	60	150	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	200	150	0,7	0,2
8	2.8	250	500	75	180	75	$3 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^5$	120	250	0,8	0,3
9	2.9	300	450	60	120	30	$3 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^5$	40	100	0,7	0,25
10	2.10	100	50	350	45	100	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	50	200	0,5	0,1
11	2.11	200	80	400	60	150	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	40	150	0,7	0,2
12	2.12	250	500	75	180	75	$3 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^5$	50	250	0,8	0,3
13	2.13	300	60	450	90	120	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	150	100	0,7	0,25
14	2.14	100	50	350	45	100	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	40	200	0,5	0,1
15	2.15	150	350	60	120	70	$3 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^5$	30	100	0,6	0,15
16	2.16	250	500	75	180	75	$3 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^5$	120	30	0,8	0,3
17	2.17	300	60	450	90	120	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	150	40	0,7	0,25
18	2.18	100	50	350	45	100	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	100	25	0,5	0,1
19	2.19	150	350	60	120	70	$3 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^5$	25	100	0,6	0,15
20	2.20	200	80	400	60	150	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	30	150	0,7	0,2
21	2.1	150	350	60	120	70	$3 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^5$	150	100	0,6	0,15
22	2.2	200	80	400	40	160	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	200	150	1,0	0,2
23	2.3	250	500	75	180	75	$3 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^5$	120	250	0,8	0,3
24	2.4	300	60	450	90	120	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	150	100	0,7	0,25
25	2.5	100	50	350	24	96	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	100	200	0,6	0,1

Продолжение табл. 2.1

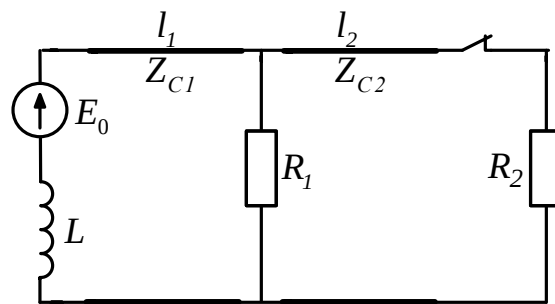
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
26	2.6	200	80	400	60	150	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	200	150	0,7	0,2
27	2.7	250	500	75	180	75	$3 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^5$	120	250	0,8	0,3
28	2.8	300	60	450	90	120	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	150	100	0,7	0,25
29	2.9	100	350	50	240	60	$3 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^5$	50	200	1,4	0,1
30	2.10	150	350	60	120	70	$3 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^5$	40	100	0,6	0,15
31	2.11	250	500	75	180	75	$3 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^5$	50	250	0,8	0,3
32	2.12	300	60	450	90	120	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	40	100	0,7	0,25
33	2.13	100	50	350	45	100	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	100	200	0,5	0,1
34	2.14	150	350	60	120	70	$3 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^5$	50	100	0,6	0,15
35	2.15	200	80	400	60	150	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	40	150	0,7	0,2
36	2.16	300	60	450	90	120	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	150	40	0,7	0,25
37	2.17	100	50	350	45	100	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	100	30	0,5	0,1
38	2.18	150	350	60	120	70	$3 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^5$	150	30	0,6	0,15
39	2.19	200	80	400	60	150	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	40	150	0,7	0,2
40	2.20	250	500	75	180	75	$3 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^5$	50	250	0,8	0,3
41	2.1	200	80	400	60	150	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	200	150	0,7	0,2
42	2.2	250	75	500	30	120	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	120	250	0,7	0,3
43	2.3	300	60	450	90	120	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	150	100	0,7	0,25
44	2.4	100	50	350	45	100	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	100	200	0,5	0,1
45	2.5	200	80	400	40	160	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	200	150	1,0	0,2
46	2.6	250	500	75	180	75	$3 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^5$	120	250	0,8	0,3
47	2.7	300	60	450	90	120	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	150	100	0,7	0,25
48	2.8	100	50	350	45	100	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	100	200	0,5	0,1
49	2.9	150	350	60	96	24	$3 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^5$	40	100	0,6	0,15
50	2.10	200	80	400	60	150	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	50	150	0,7	0,2
51	2.11	300	60	450	90	120	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	40	100	0,7	0,25
52	2.12	100	50	350	45	100	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	50	200	0,5	0,1
53	2.13	150	350	60	120	70	$3 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^5$	150	100	0,6	0,15
54	2.14	200	80	400	60	150	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	40	150	0,7	0,2
55	2.15	250	500	75	180	75	$3 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^5$	50	250	0,8	0,3
56	2.16	100	50	350	45	100	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	100	25	0,5	0,1
57	2.17	150	350	60	120	70	$3 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^5$	150	50	0,6	0,15
58	2.18	200	80	400	60	150	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	200	40	0,7	0,2
59	2.19	250	500	75	180	75	$3 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^5$	50	250	0,8	0,3
60	2.20	300	60	450	90	120	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	30	100	0,7	0,25
61	2.1	250	500	75	180	75	$3 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^5$	120	250	0,8	0,3
62	2.2	300	60	450	60	240	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	150	100	1,4	0,25
63	2.3	100	50	350	45	100	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	100	200	0,5	0,1
64	2.4	150	350	60	120	70	$3 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^5$	150	100	0,6	0,15
65	2.5	250	75	500	30	120	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	120	250	0,7	0,3
66	2.6	300	60	450	90	120	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	150	100	0,7	0,25
67	2.7	100	50	350	45	100	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	100	200	0,5	0,1
68	2.8	150	350	60	120	70	$3 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^5$	150	100	0,6	0,15
69	2.9	200	400	80	180	45	$3 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^5$	50	150	1,1	0,2
70	2.10	250	500	75	180	75	$3 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^5$	40	250	0,8	0,3
71	2.11	100	50	350	45	100	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	50	200	0,5	0,1
72	2.12	150	350	60	120	70	$3 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^5$	40	100	0,6	0,15
73	2.13	200	80	400	60	150	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	200	150	0,7	0,2
74	2.14	250	500	75	180	75	$3 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^5$	50	250	0,8	0,3
75	2.15	300	60	450	90	120	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	40	100	0,7	0,25
76	2.16	150	350	60	120	70	$3 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^5$	150	50	0,6	0,15
77	2.17	200	80	400	60	150	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	200	40	0,7	0,2
78	2.18	250	500	75	180	75	$3 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^5$	120	50	0,8	0,3

Окончание табл. 2.1

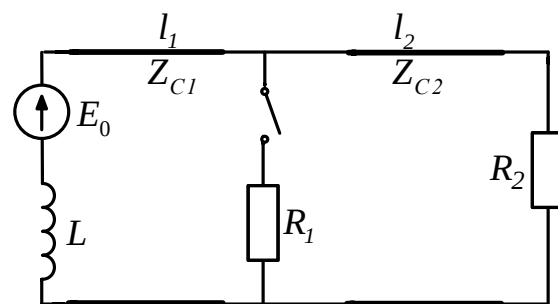
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
79	2.19	300	60	450	90	120	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	30	100	0,7	0,25
80	2.20	100	50	350	45	100	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	40	200	0,5	0,1
81	2.1	300	60	450	90	120	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	150	100	0,7	0,25
82	2.2	100	50	350	24	96	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	100	200	0,6	0,1
83	2.3	150	350	60	120	70	$3 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^5$	150	100	0,6	0,15
84	2.4	200	80	400	60	150	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	200	150	0,7	0,2
85	2.5	300	60	450	60	240	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	150	100	1,4	0,25
86	2.6	100	50	350	45	100	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	100	200	0,5	0,1
87	2.7	150	350	60	120	70	$3 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^5$	150	100	0,6	0,15
88	2.8	200	80	400	60	150	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	200	150	0,7	0,2
89	2.9	250	500	75	160	40	$3 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^5$	40	250	1,0	0,3
90	2.10	300	60	450	90	120	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	50	100	0,7	0,25
91	2.11	150	350	60	120	70	$3 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^5$	40	100	0,6	0,15
92	2.12	200	80	400	60	150	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	50	150	0,7	0,2
93	2.13	250	500	75	180	75	$3 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^5$	120	250	0,8	0,3
94	2.14	300	60	450	90	120	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	40	100	0,7	0,25
95	2.15	100	50	350	45	100	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	30	200	0,5	0,1
96	2.16	200	80	400	60	150	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	200	150	0,7	0,2
97	2.17	250	500	75	180	75	$3 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^5$	120	50	0,8	0,3
98	2.18	300	60	450	90	120	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	150	40	0,7	0,25
99	2.19	100	50	350	45	100	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	25	200	0,5	0,1
100	2.20	150	350	60	120	70	$3 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^5$	25	100	0,6	0,15



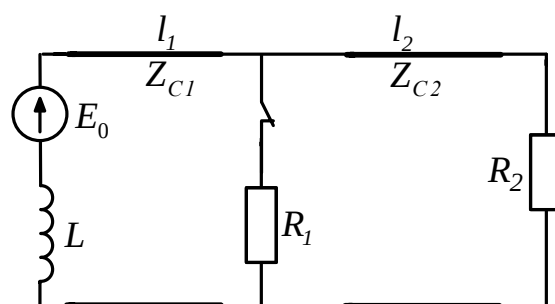
Puc. 2.1



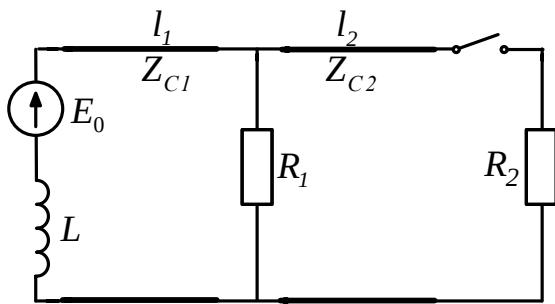
Puc. 2.2



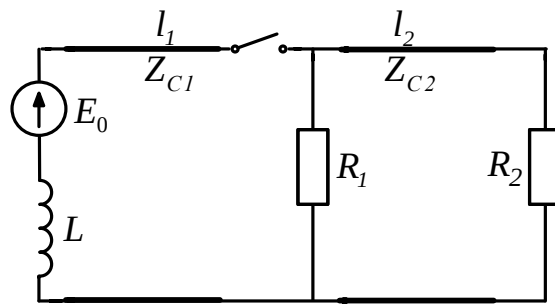
Puc. 2.3



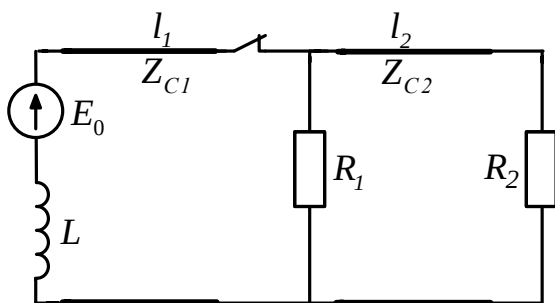
Puc. 2.4



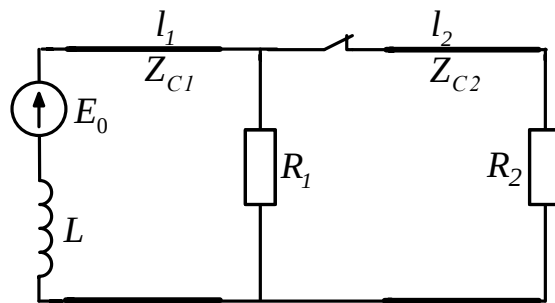
Puc. 2.5



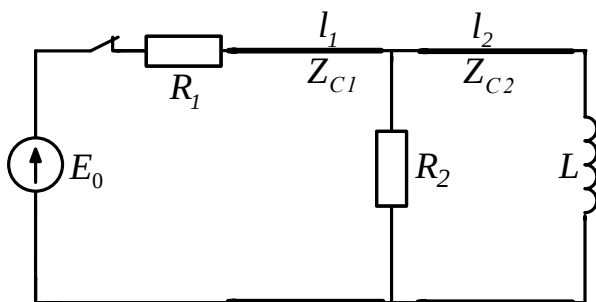
Puc. 2.6



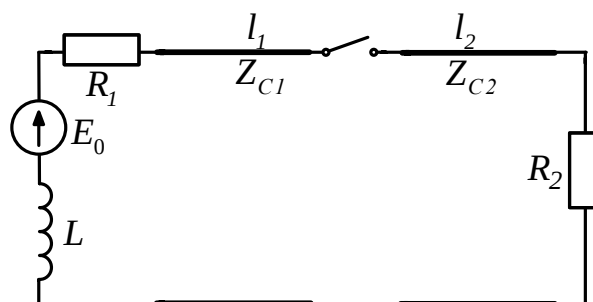
Puc. 2.7



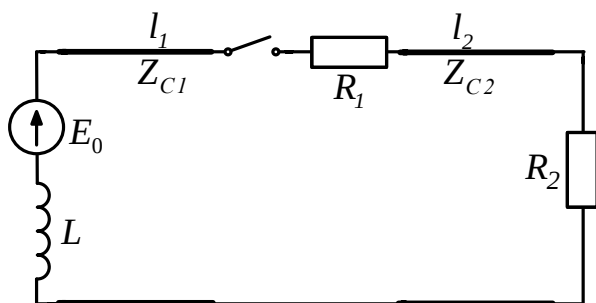
Puc. 2.8



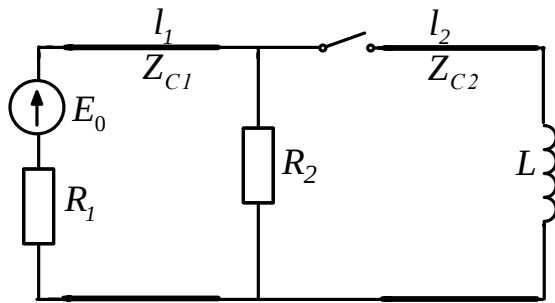
Puc. 2.9



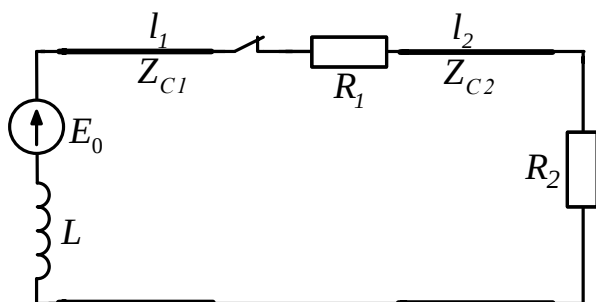
Puc. 2.10



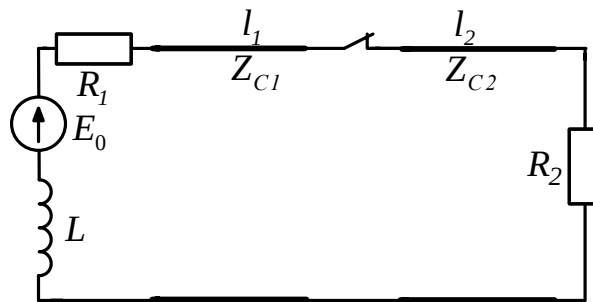
Puc. 2.11



Puc. 2.12



Puc. 2.13



Puc. 2.14

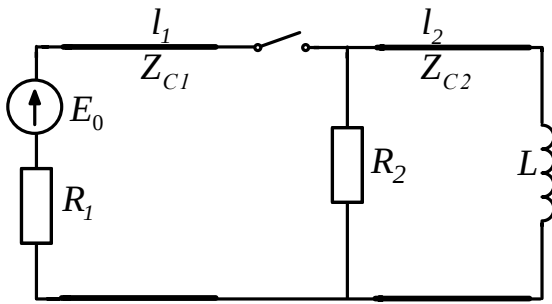


Рис. 2.15

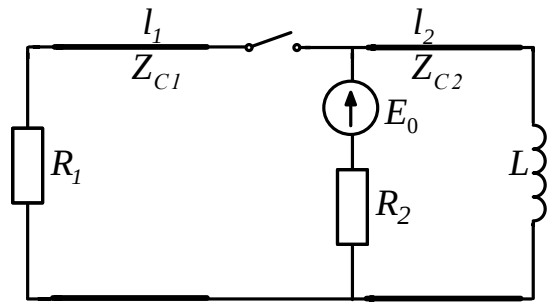


Рис. 2.16

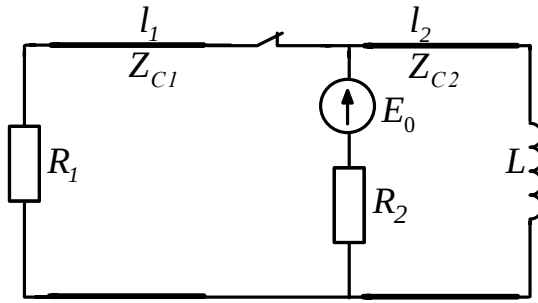


Рис. 2.17

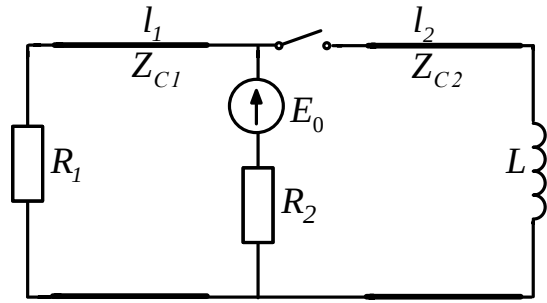


Рис. 2.18

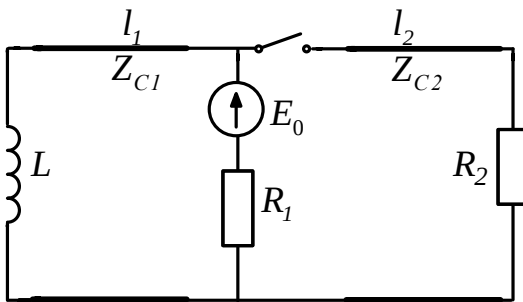


Рис. 2.19

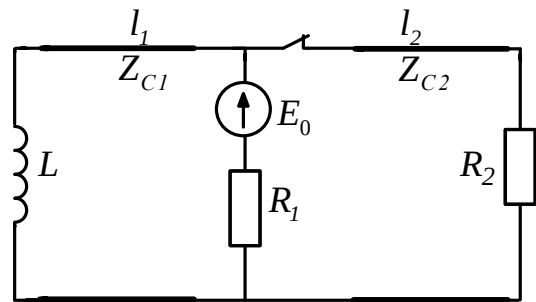


Рис. 2.20

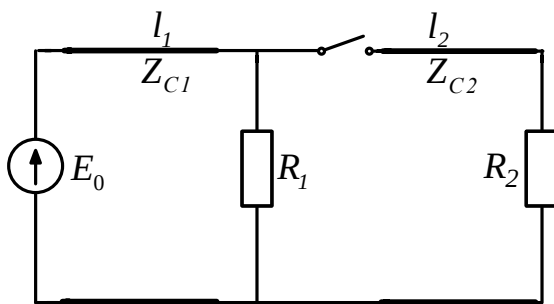
Таблица 2.2. Значения параметров электрических цепей для второго уровня

Номер варианта	Номер схемы	E_0 , кВ	Z_{C1} , Ом	Z_{C2} , Ом	l_1 , км	l_2 , км	$V_{\delta 1}$, км/с	$V_{\delta 2}$, км/с	R_1 , Ом	R_2 , Ом	t_0 , мс
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2.21	100	50	350	45	100	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	100	200	0,5
2	2.22	150	60	350	45	180	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	150	100	1,1
3	2.23	200	80	400	60	150	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	200	150	0,7
4	2.24	250	500	75	180	75	$3 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^5$	120	250	0,8
5	2.25	300	60	450	40	160	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	150	100	1,0
6	2.26	150	350	60	120	70	$3 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^5$	150	100	0,6
7	2.27	200	80	400	60	150	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	200	150	0,7
8	2.28	250	500	75	180	75	$3 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^5$	120	250	0,8
9	2.29	300	450	60	120	30	$3 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^5$	40	100	0,7
10	2.30	100	50	350	45	100	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	50	200	0,5
11	2.31	200	80	400	60	150	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	40	150	0,7
12	2.32	250	500	75	180	75	$3 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^5$	50	250	0,8
13	2.33	300	60	450	90	120	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	150	100	0,7
14	2.34	100	50	350	45	100	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	40	200	0,5
15	2.35	150	350	60	120	70	$3 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^5$	30	100	0,6

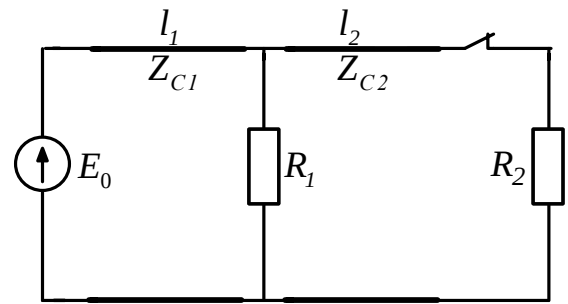
Продолжение табл. 2.2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
16	2.36	250	500	75	180	75	$3 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^5$	120	30	0,8
17	2.37	300	60	450	90	120	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	150	40	0,7
18	2.38	100	50	350	45	100	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	100	25	0,5
19	2.39	150	350	60	120	70	$3 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^5$	25	100	0,6
20	2.40	200	80	400	60	150	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	30	150	0,7
21	2.21	150	350	60	120	70	$3 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^5$	150	100	0,6
22	2.22	200	80	400	40	160	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	200	150	1,0
23	2.23	250	500	75	180	75	$3 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^5$	120	250	0,8
24	2.24	300	60	450	90	120	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	150	100	0,7
25	2.25	100	50	350	24	96	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	100	200	0,6
26	2.26	200	80	400	60	150	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	200	150	0,7
27	2.27	250	500	75	180	75	$3 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^5$	120	250	0,8
28	2.28	300	60	450	90	120	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	150	100	0,7
29	2.29	100	350	50	240	60	$3 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^5$	50	200	1,4
30	2.30	150	350	60	120	70	$3 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^5$	40	100	0,6
31	2.31	250	500	75	180	75	$3 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^5$	50	250	0,8
32	2.32	300	60	450	90	120	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	40	100	0,7
33	2.33	100	50	350	45	100	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	100	200	0,5
34	2.34	150	350	60	120	70	$3 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^5$	50	100	0,6
35	2.35	200	80	400	60	150	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	40	150	0,7
36	2.36	300	60	450	90	120	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	150	40	0,7
37	2.37	100	50	350	45	100	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	100	30	0,5
38	2.38	150	350	60	120	70	$3 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^5$	150	30	0,6
39	2.39	200	80	400	60	150	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	40	150	0,7
40	2.40	250	500	75	180	75	$3 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^5$	50	250	0,8
41	2.21	200	80	400	60	150	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	200	150	0,7
42	2.22	250	75	500	30	120	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	120	250	0,7
43	2.23	300	60	450	90	120	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	150	100	0,7
44	2.24	100	50	350	45	100	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	100	200	0,5
45	2.25	200	80	400	40	160	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	200	150	1,0
46	2.26	250	500	75	180	75	$3 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^5$	120	250	0,8
47	2.27	300	60	450	90	120	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	150	100	0,7
48	2.28	100	50	350	45	100	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	100	200	0,5
49	2.29	150	350	60	96	24	$3 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^5$	40	100	0,6
50	2.30	200	80	400	60	150	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	50	150	0,7
51	2.31	300	60	450	90	120	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	40	100	0,7
52	2.32	100	50	350	45	100	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	50	200	0,5
53	2.33	150	350	60	120	70	$3 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^5$	150	100	0,6
54	2.34	200	80	400	60	150	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	40	150	0,7
55	2.35	250	500	75	180	75	$3 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^5$	50	250	0,8
56	2.36	100	50	350	45	100	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	100	25	0,5
57	2.37	150	350	60	120	70	$3 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^5$	150	50	0,6
58	2.38	200	80	400	60	150	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	200	40	0,7
59	2.39	250	500	75	180	75	$3 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^5$	50	250	0,8
60	2.40	300	60	450	90	120	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	30	100	0,7
61	2.21	250	500	75	180	75	$3 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^5$	120	250	0,8
62	2.22	300	60	450	60	240	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	150	100	1,4
63	2.23	100	50	350	45	100	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	100	200	0,5
64	2.24	150	350	60	120	70	$3 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^5$	150	100	0,6
65	2.25	250	75	500	30	120	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	120	250	0,7
66	2.26	300	60	450	90	120	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	150	100	0,7
67	2.27	100	50	350	45	100	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	100	200	0,5
68	2.28	150	350	60	120	70	$3 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^5$	150	100	0,6

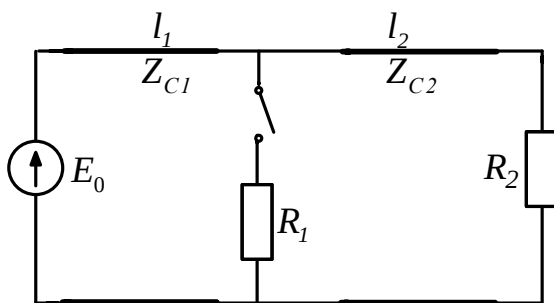
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
69	2.29	200	400	80	180	45	$3 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^5$	50	150	1,1
70	2.30	250	500	75	180	75	$3 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^5$	40	250	0,8
71	2.31	100	50	350	45	100	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	50	200	0,5
72	2.32	150	350	60	120	70	$3 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^5$	40	100	0,6
73	2.33	200	80	400	60	150	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	200	150	0,7
74	2.34	250	500	75	180	75	$3 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^5$	50	250	0,8
75	2.35	300	60	450	90	120	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	40	100	0,7
76	2.36	150	350	60	120	70	$3 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^5$	150	50	0,6
77	2.37	200	80	400	60	150	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	200	40	0,7
78	2.38	250	500	75	180	75	$3 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^5$	120	50	0,8
79	2.39	300	60	450	90	120	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	30	100	0,7
80	2.40	100	50	350	45	100	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	40	200	0,5
81	2.21	300	60	450	90	120	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	150	100	0,7
82	2.22	100	50	350	24	96	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	100	200	0,6
83	2.23	150	350	60	120	70	$3 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^5$	150	100	0,6
84	2.24	200	80	400	60	150	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	200	150	0,7
85	2.25	300	60	450	60	240	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	150	100	1,4
86	2.26	100	50	350	45	100	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	100	200	0,5
87	2.27	150	350	60	120	70	$3 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^5$	150	100	0,6
88	2.28	200	80	400	60	150	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	200	150	0,7
89	2.29	250	500	75	160	40	$3 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^5$	40	250	1,0
90	2.30	300	60	450	90	120	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	50	100	0,7
91	2.31	150	350	60	120	70	$3 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^5$	40	100	0,6
92	2.32	200	80	400	60	150	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	50	150	0,7
93	2.33	250	500	75	180	75	$3 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^5$	120	250	0,8
94	2.34	300	60	450	90	120	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	40	100	0,7
95	2.35	100	50	350	45	100	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	30	200	0,5
96	2.36	200	80	400	60	150	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	200	150	0,7
97	2.37	250	500	75	180	75	$3 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^5$	120	50	0,8
98	2.38	300	60	450	90	120	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	150	40	0,7
99	2.39	100	50	350	45	100	$1,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	25	200	0,5
100	2.40	150	350	60	120	70	$3 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^5$	25	100	0,6



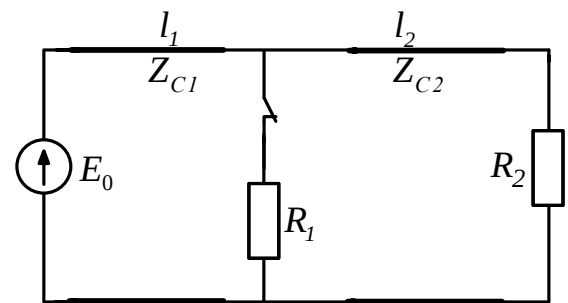
Puc. 2.21



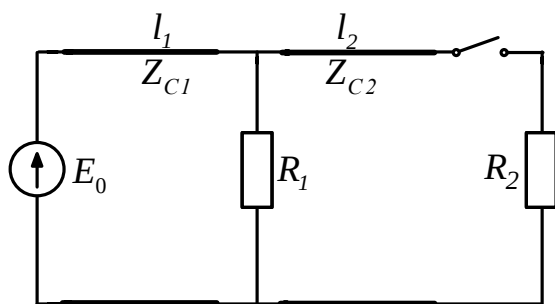
Puc. 2.22



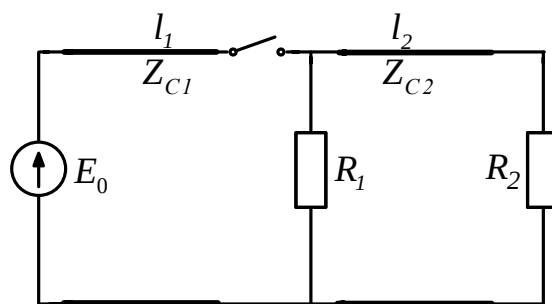
Puc. 2.23



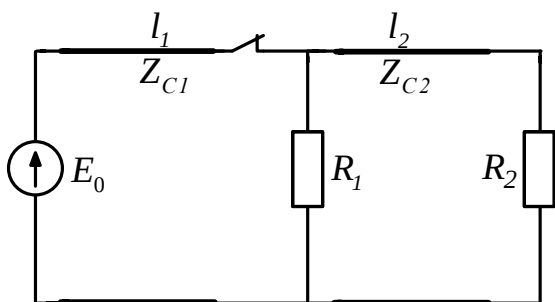
Puc. 2.24



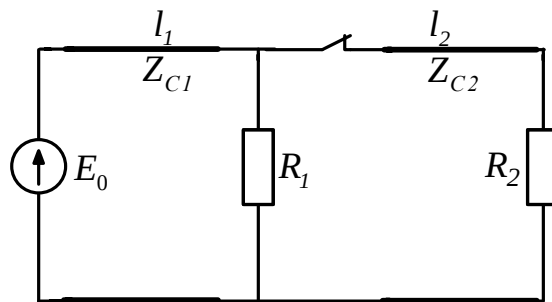
Puc. 2.25



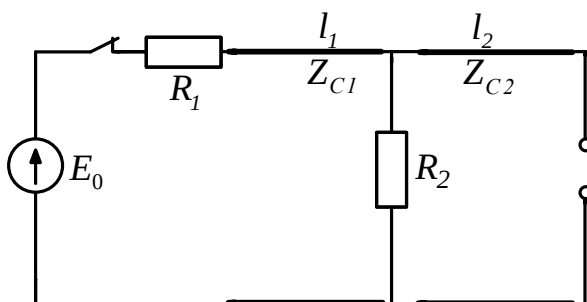
Puc. 2.26



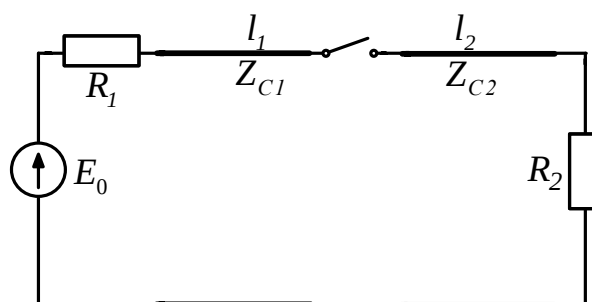
Puc. 2.27



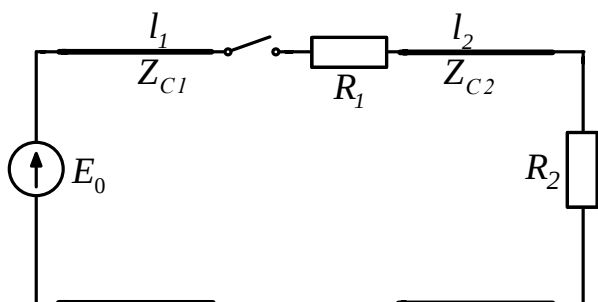
Puc. 2.28



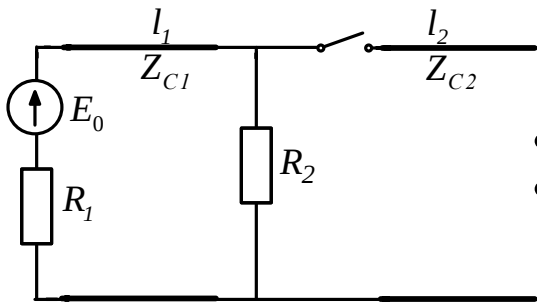
Puc. 2.29



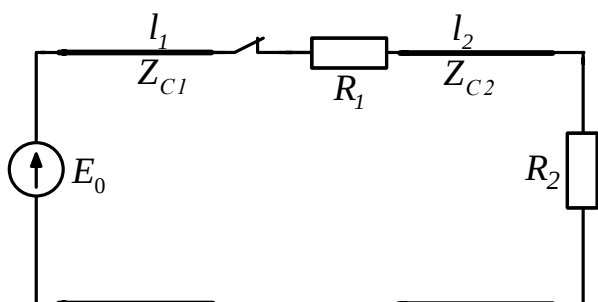
Puc. 2.30



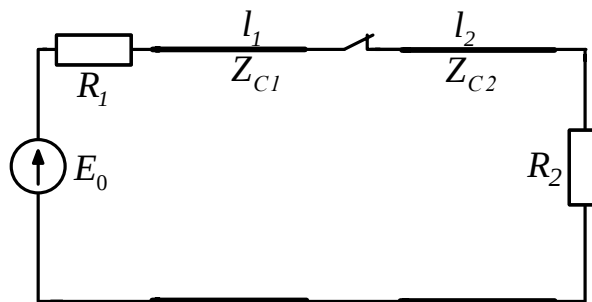
Puc. 2.31



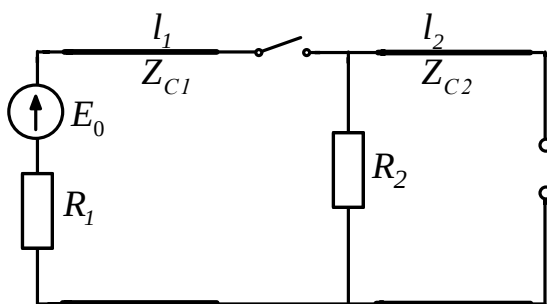
Puc. 2.32



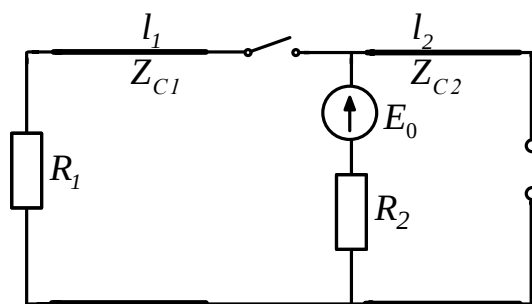
Puc. 2.33



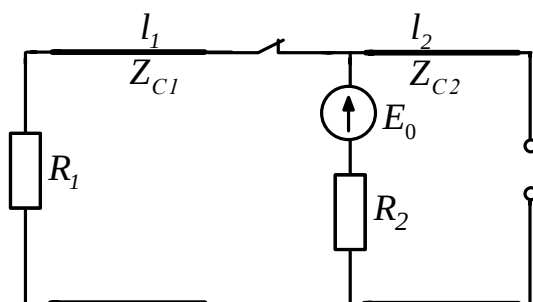
Puc. 2.34



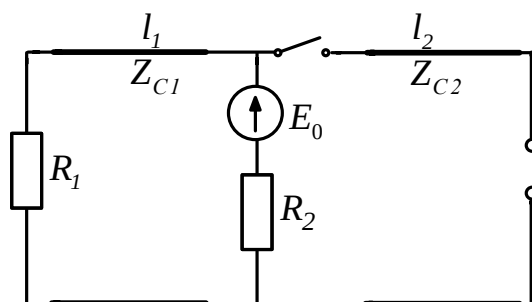
Puc. 2.35



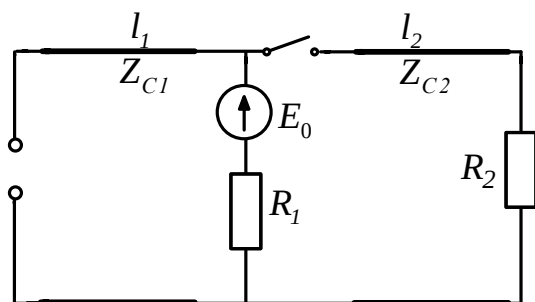
Puc. 2.36



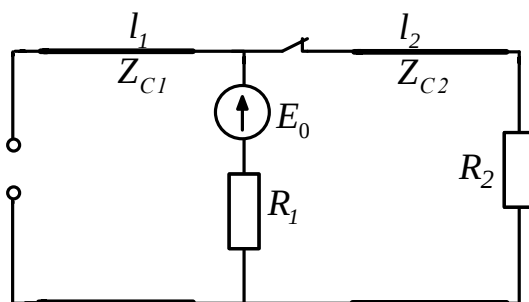
Puc. 2.37



Puc. 2.38



Puc. 2.39



Puc. 2.40

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ К ЗАДАНИЮ 2

ОСНОВЫ РАСЧЕТА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЦЕПЯХ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Электрическими цепями с распределенными параметрами (другое название – **длинные линии**) называют такие линии, в которых ток и напряжение между проводами не остаются постоянными вдоль линии. Токи и напряжения в этих цепях являются функциями двух независимых переменных: времени t и пространственной координаты x . Эффект изменения тока и напряжения вдоль линии имеет место вследствие того, что линии обладают распределенными продольными и поперечными параметрами. При этом продольные параметры образованы активными сопротивлениями проводов линии и индуктивностями двух противостоящих друг другу участков линии, а поперечные параметры – проводимостями утечки, появляющейся вследствие несовершенства изоляции, и емкостями между противостоящими друг другу участками линии.

Под **первичными параметрами длинной линии** понимают сопротивление R_0 , индуктивность L_0 , проводимость G_0 и емкость $\tilde{N}_0$, отнесенные к единице ее длины. Для большинства практических задач допустимо считать, что параметры длинной линии распределены вдоль цепи равномерно, это является некоторой идеализацией действительных условий. Такую линию принято называть **однородной**.

В длинных линиях, как и в цепях с сосредоточенными параметрами, переходные процессы возникают при различного вида коммутациях, а также при атмосферных (грозовых) разрядах. В линиях электропередачи высокого напряжения во время переходного режима возможны перенапряжения и сверхтоки. При неправильном выборе оборудования перенапряжения могут привести к пробое изоляции, а сверхтоки – к срабатыванию защиты и отключению установок, перегоранию приборов и аппаратов, обгоранию контактов.

В общем случае расчет переходных процессов в цепях с распределенными параметрами представляет сложную математическую задачу. Поэтому изучение физической картины переходных процессов в этих цепях и основных расчетных приемов их анализа принято проводить для линий без потерь при $R_0 = 0$ и $G_0 = 0$. Практически это оправдано для реальных линий в начальных стадиях переходного процесса, часто наиболее важных при определении возможных перенапряжений и сверхтоков.

В общем случае в однородной линии без потерь в момент времени t для пространственной координаты x мгновенные значения напряжения $u(x, t)$ и тока $i(x, t)$ могут быть представлены следующими выражениями:

$$u(x, t) = u = f_1\left(t - \frac{x}{V_0}\right) + f_2\left(t + \frac{x}{V_0}\right);$$

$$i(x,t) = i = \frac{1}{Z_C} f_1\left(t - \frac{x}{V_\delta}\right) - \frac{1}{Z_C} f_2\left(t + \frac{x}{V_\delta}\right), \quad (2.1)$$

где $V_\delta = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}$ – скорость волнового фронта или скорость волны;

$Z_C = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$ – волновое сопротивление линии без потерь.

Первая слагающая напряжения или тока в (2.1) представляет собой напряжение или ток волны, движущейся со скоростью V_δ в сторону возрастания координаты x (от начала к концу линии), так как с течением времени t одно и то же значение аргумента $\left(t - \frac{x}{V_\delta}\right)$ наблюдается в точ-

ках, координаты x которых растут линейно. Такая волна называется прямой. Вторая слагающая напряжения или тока в (2.1) представляет собой волну, движущуюся со скоростью V_δ в сторону убывания координаты x (от конца линии к началу). Такая волна называется обратной. Поэтому выражения (2.1) можно представить в виде

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u = u_{i\delta} + u_{i\delta\delta}; \\ i(x,t) &= i = i_{i\delta} + i_{i\delta\delta}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\text{где} \quad i_{i\delta} = \frac{u_{i\delta}}{Z_C}; \quad i_{i\delta\delta} = -\frac{u_{i\delta\delta}}{Z_C}. \quad (2.3)$$

Знак минус у тока обратной волны связан с тем, что выбранные положительные направления токов $i_{i\delta}$ и $i_{i\delta\delta}$ совпадают с направлением тока i в линии (2.2). Вопрос о выборе положительного направления тока $i_{i\delta\delta}$ не принципиален, и в некоторых учебниках использованы выражения

$i = i_{i\delta} - i_{i\delta\delta}; \quad i_{i\delta\delta} = \frac{u_{i\delta\delta}}{Z_C}$. Соотношения (2.3) говорят о пропорциональности

токов и напряжений для каждой из волн (аналог закона Ома для резистора), следствием чего является возможность расчета распределения токов волн по распределениям напряжений (и наоборот) простым изменением масштабов соответствующих кривых. Однако это относится только к токам и напряжениям отдельных волн, результирующее напряжение в линии $u(x,t)$ и ток в ней $i(x,t)$ непропорциональны.

В соответствии с (2.2) переходный процесс в линии можно представить в виде наложения напряжения и тока прямой и обратной волн, которые движутся со скоростью V_δ . Для воздушных линий она равна примерно скорости света в вакууме ($V_\delta \approx 3 \cdot 10^8$ м/с); в кабельных линиях скорость распространения волн примерно вдвое меньше. Формы волн напря-

жения и тока зависят от граничных и начальных условий и сохраняются неизменными при движении волн вдоль однородной линии без потерь.

Волны при движении по линии падают на оборудование, на точки присоединения линий и другие места электрической неоднородности, где они испытывают отражение и преломление. Эти вновь образовавшиеся волны, накладываясь на волны исходные, изменяют распределение напряжения и тока в линиях и присоединенных к ним нагрузках.

Таким образом, переходный процесс в линии является результатом наложения на докоммутационный режим волн напряжения и тока, возникающих при коммутациях или атмосферных разрядах. В линиях конечной длины этот первичный процесс усложнен появлением волн, обусловленных многократными отражениями и преломлениями на стыках линий и точках подключения оборудования и нагрузок.

РАСЧЕТ ВОЛН, ВОЗНИКАЮЩИХ ПРИ КОММУТАЦИЯХ

Под коммутацией применительно к переходным процессам в длинных линиях понимается, как и в цепях с сосредоточенными параметрами, включение и отключение пассивных и активных ветвей, отдельных линий или их участков, внезапные изменения параметров, разного рода переключения и т.д. Как и в цепях с сосредоточенными параметрами, коммутация считается мгновенной, и, соответственно, остаются справедливыми законы коммутации. Однако изменения электрического состояния различных участков линии, обусловленные коммутацией, начинаются не одновременно с коммутацией, а лишь после прихода волны, возникшей в том сечении линии, где эта коммутация произошла. Формы волн, образовавшихся при коммутации, зависят только от электрических характеристик той части линии, где произошла коммутация. Поясним этот момент на примере подключения двух незаряженных линий, имеющих волновые сопротивления Z_{C1} и Z_{C2} , к источнику постоянной ЭДС E_0 с внутренним сопротивлением R_0 (рис. 2.41).

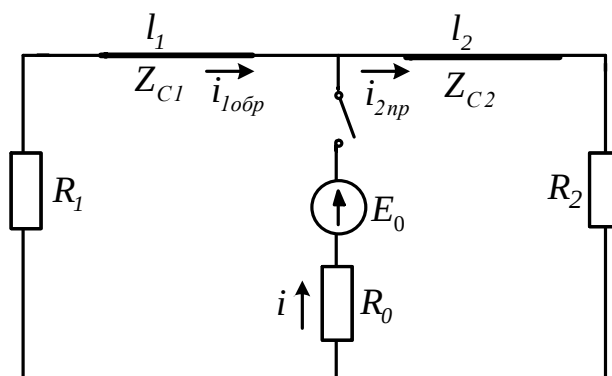


Рис. 2.41

После подключения источника в первой линии возникают обратные волны тока $i_{1\hat{a}\hat{o}}$ и напряжения $u_{1\hat{a}\hat{o}} = -Z_{C1}i_{1\hat{a}\hat{o}}$, которые двигаются от конца первой линии к ее началу, а во второй линии – прямые волны тока $i_{2\hat{r}}$ и

напряжения $u_{2\bar{i}\delta} = Z_{C2}i_{2\bar{i}\delta}$, которые двигаются от начала второй линии к ее концу. В соответствии с первым и вторым законами Кирхгофа и с учетом (2.3) будут справедливы соотношения

$$\begin{aligned} E_0 &= u_{1\hat{i}\acute{\alpha}\delta} + iR_0 = -Z_{C1}i_{1\hat{i}\acute{\alpha}\delta} + iR_0; \\ E_0 &= u_{2\bar{i}\delta} + iR_0 = Z_{C2}i_{2\bar{i}\delta} + iR_0; \\ i &= -i_{1\hat{i}\acute{\alpha}\delta} + i_{2\bar{i}\delta}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Этим уравнениям соответствует эквивалентная схема с сосредоточенными параметрами, представленная на рис. 2.42, в которой линии с движущимися по ним волнами тока и напряжения представлены резисторами, сопротивления которых равны волновым сопротивлениям соответствующих линий. Следует отметить, что нагрузка в начале и конце соответственно первой и второй линий не оказывает влияние на волны, возникшие после коммутации.

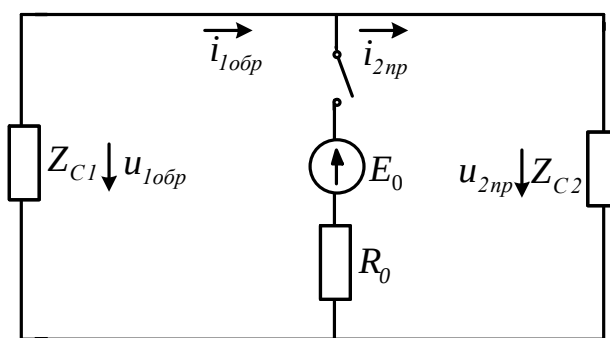


Рис. 2.42

Допустим в приведенном примере $E_0 = 100$ кВ; $Z_{C1} = 500$ Ом; $Z_{C2} = 60$ Ом; $R_0 = 10$ Ом; скорости распространения волн в линиях $V_{\delta 1} = 3 \cdot 10^5$ км/с; $V_{\delta 2} = 1,5 \cdot 10^5$ км/с. Требуется найти распределение токов и напряжений в линиях к моменту времени $t_0 = 2 \cdot 10^{-4}$ с после коммутации. Из решения (2.4) следует:

$$\begin{aligned} i &= \frac{E_0}{R_0 + \frac{Z_{C1}Z_{C2}}{Z_{C1} + Z_{C2}}} = 1,57 \text{ кА}; \quad u_1 = u_{1\hat{i}\acute{\alpha}\delta} = u_2 = u_{2\bar{i}\delta} = E_0 - iR_0 = 84,3 \text{ кВ}; \\ i_2 &= i_{2\bar{i}\delta} = \frac{u_{2\bar{i}\delta}}{Z_{C2}} = 1,4 \text{ кА}; \quad i_1 = i_{1\hat{i}\acute{\alpha}\delta} = -\frac{u_{1\hat{i}\acute{\alpha}\delta}}{Z_{C1}} = -0,17 \text{ кА}. \end{aligned}$$

Рассчитанные в месте коммутации (конец первой и начало второй линий) по эквивалентной схеме волны токов и напряжений перемещаются без затуханий вдоль линий с соответствующими скоростями. К моменту времени t_0 волны тока и напряжения в первой линии пройдут расстояние $x_1 = V_{\delta 1}t_0 = 60$ км от конца линии, а во второй линии – расстояние $x_2 = V_{\delta 2}t_0 = 30$ км от начала линии. Полученные волны называются волна-

ми с прямоугольным фронтом. Распределение волн тока и напряжения в линиях к моменту времени t_0 приведено соответственно на рис. 2.43.

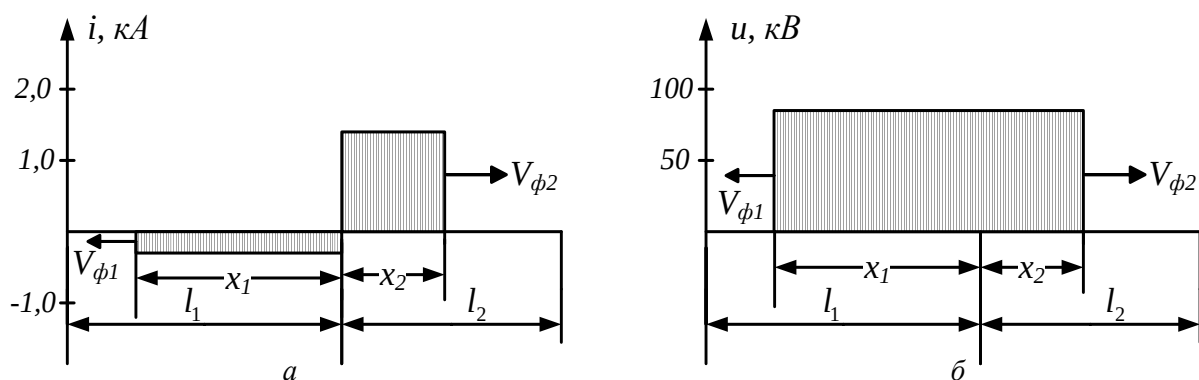


Рис. 2.43

В рассмотренном примере определены волны прямоугольной формы при включении источника постоянного напряжения. Следует отметить, что в тех случаях, когда длина линии мала по сравнению с длиной волны, аналогичный результат будет получен и при включении источника синусоидальной ЭДС. Например, длина волны в воздушной линии при

частоте $f = 50$ Гц составляет $\lambda_a = \frac{V_a}{f} \approx \frac{3 \cdot 10^5}{50} \approx 6000$ км. Для линии длиной

$l = 300$ км фазы напряжения в начале и конце линии будут отличаться на $\frac{2\pi l}{\lambda_a} = 18^\circ$ и распределение напряжения волны по линии будет практически постоянным и равным значению напряжения источника в момент коммутации.

При коммутациях в длинных линиях действуют те же законы, что и в цепях с сосредоточенными параметрами. При этом для расчета волн тока и напряжения необходимо составить эквивалентную схему, в которой линии представляются их волновыми сопротивлениями. При всех коммутациях, где участвуют только резисторы, будут возникать только волны с прямоугольным фронтом. Если же в месте коммутации присутствуют катушки индуктивности и конденсаторы, фронт волн будет формироваться процессами в этих накопителях энергии и уже не будет прямоугольным. Определение зависимостей токов и напряжений в месте коммутации от времени в этом случае ведется по эквивалентной схеме любым известным методом расчета переходного процесса в цепи с сосредоточенными параметрами.

В тех случаях, когда различного рода переключения происходят в линиях, находящихся под напряжением, с протекающими по ним токами, для определения волн, возникающих при коммутации, целесообразно воспользоваться методом суперпозиции (наложения). Пусть на стыке двух заряженных линий (рис. 2.44) подключается активная нагрузка. В соответствии с принципом суперпозиции режим в этой цепи можно представить как результат наложения на докоммутационный режим волн, возник-

кающих при подключении к незаряженным линиям источника с ЭДС, равной напряжению U_X на разомкнутом рубильнике в схеме рис. 2.44. Для расчета этого режима справедлива эквивалентная схема с сосредоточенными параметрами (рис. 2.45). Допустим в схеме на рис. 2.44 $E_0 = 300$ кВ; $Z_{C1} = 400$ Ом; $Z_{C2} = 350$ Ом; $R_1 = 50$ Ом; $R_2 = 100$ Ом; $R_3 = 200$ Ом; длина первой линии $l_1 = 80$ км, длина второй линии $l_2 = 120$ км; скорости распространения волн в линиях $V_{\delta 1} = V_{\delta 2} = V_{\delta} = 3 \cdot 10^5$ км/с. Требуется найти распределение токов и напряжений в линиях к моменту времени $t_0 = 2 \cdot 10^{-4}$ с после коммутации.

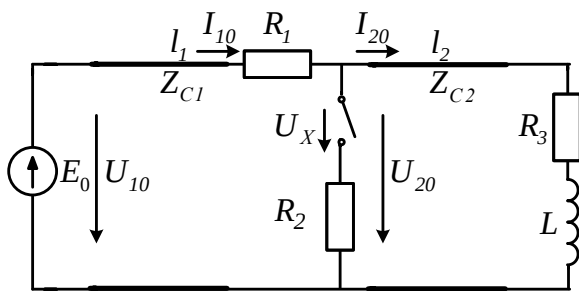


Рис. 2.44

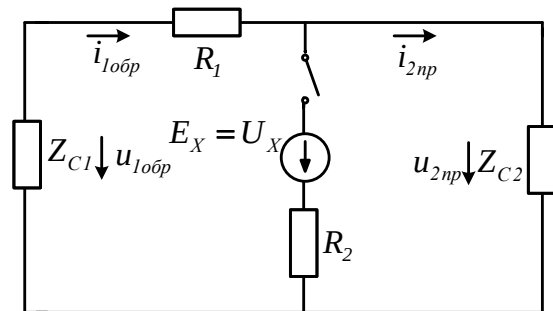


Рис. 2.45

Так как падения напряжения в линиях без потерь и на идеальном индуктивном элементе на постоянном токе нет, то до коммутации напряжения и токи в линиях были равны:

$$I_{10} = I_{20} = \frac{E_0}{R_1 + R_3} = 1,2 \text{ кА}; U_{10} = E_0 = 300 \text{ кВ}; U_{20} = I_{20} R_3 = 240 \text{ кВ}.$$

При этом напряжение на разомкнутом рубильнике $U_X = U_{20} = 240$ кВ. Распределения напряжений и токов до коммутации изображены графически соответственно на рис. 2.46, а и 2.47, а.

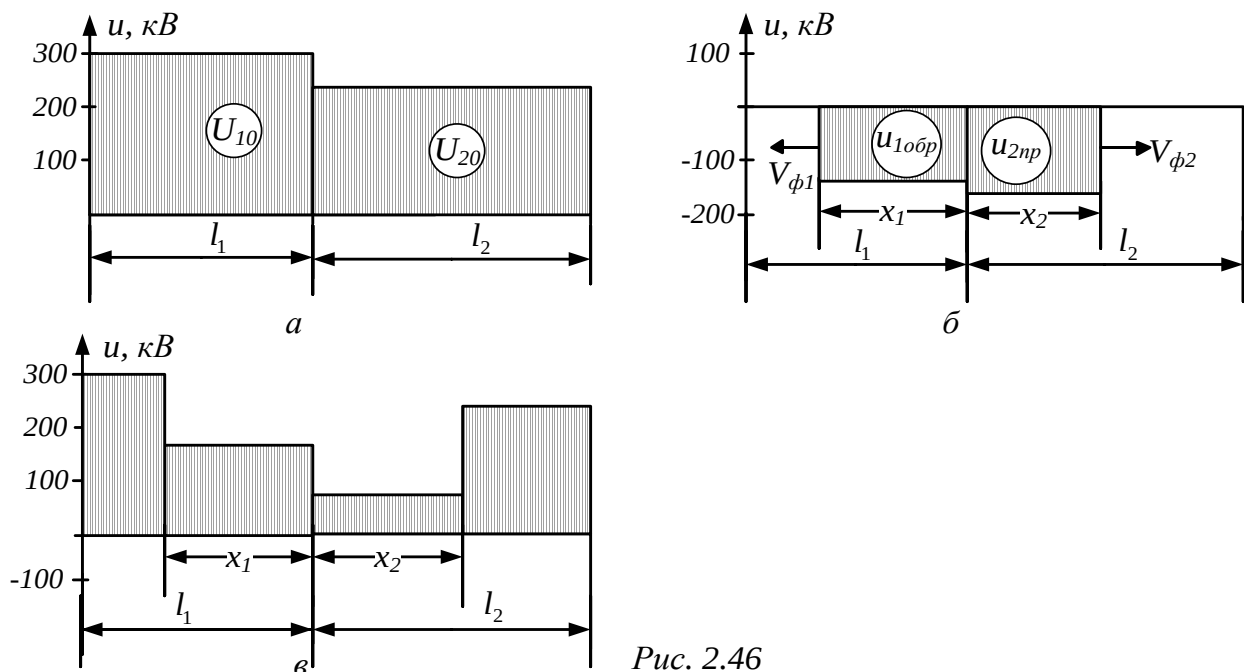


Рис. 2.46

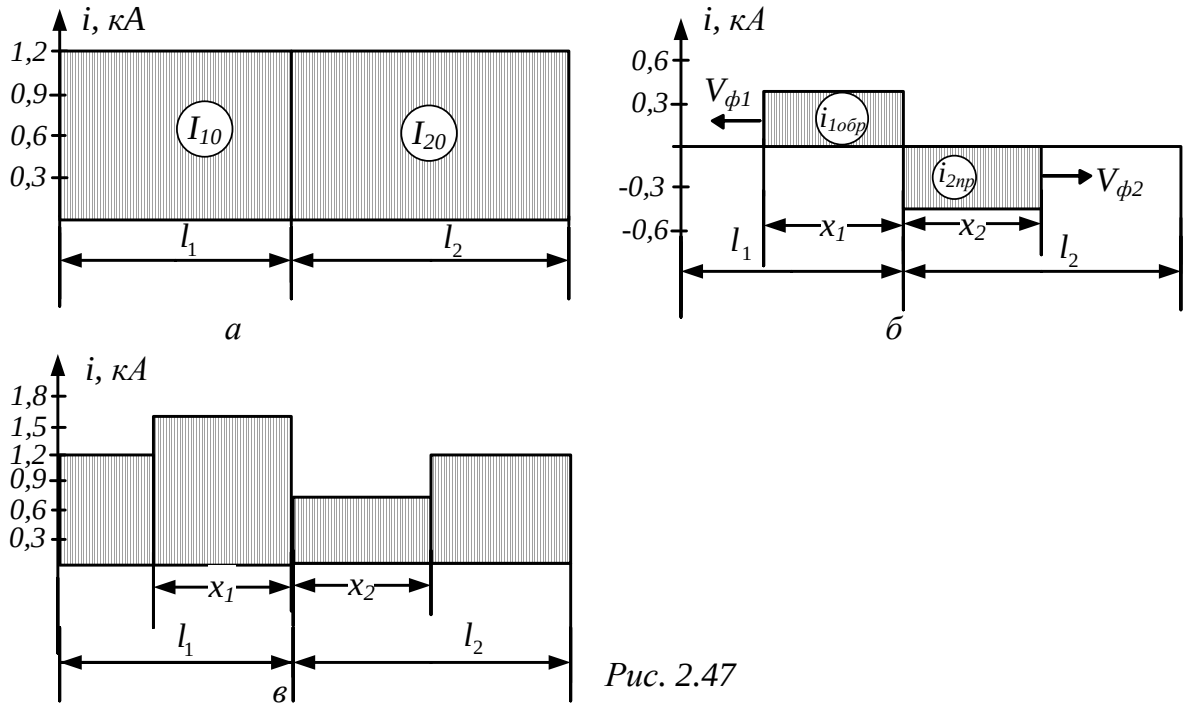


Рис. 2.47

При размыкании ключа в линиях возникают прямые и обратные волны тока и напряжения, которые распространяются по линиям вправо и влево от точки коммутации. Для определения этих волн составляется эквивалентная схема с сосредоточенными параметрами (рис. 2.45). Поскольку в этой схеме присутствуют только резисторы, волны будут иметь прямоугольный фронт, при этом

$$i = \frac{U_x}{R_2 + \frac{(Z_{C1} + R_1)Z_{C2}}{Z_{C1} + R_1 + Z_{C2}}} = 0,808 \text{ кА}; \quad i_{1\hat{a}\delta} = i \frac{Z_{C2}}{Z_{C1} + R_1 + Z_{C2}} = 0,354 \text{ кА};$$

$$i_{2\bar{r}\delta} = i_{1\hat{a}\delta} - i = -0,455 \text{ кА}; \quad u_{2\bar{r}\delta} = Z_{C2} i_{2\bar{r}\delta} = -159 \text{ кВ}; \quad u_{1\hat{a}\delta} = -Z_{C1} i_{1\hat{a}\delta} = -141 \text{ кВ}.$$

К моменту времени t_0 волны тока и напряжения в обеих линиях пройдут расстояние $x_1 = x_2 = V_\delta t_0 = 60 \text{ км}$ от точки коммутации. Распределения волн напряжения и тока в линиях к моменту времени t_0 приведены графически соответственно на рис. 2.46,б и 2.47,б. Сложив эти волны с напряжениями и токами линий до коммутации, получим результирующее распределение токов и напряжений вдоль линий к моменту времени t_0 после коммутации:

$$i_1 = I_{10} + i_{1\hat{a}\delta} = 1,554 \text{ кА}; \quad i_2 = I_{20} + i_{2\bar{r}\delta} = 0,745 \text{ кА};$$

$$u_1 = U_{10} + u_{1\hat{a}\delta} = 159 \text{ кВ}; \quad u_2 = U_{20} + u_{2\bar{r}\delta} = 81 \text{ кВ}.$$

Для сечений первой и второй линий, куда волны, возникшие при коммутации, к моменту времени еще не дошли, напряжения и токи будут равны их докоммутационным значениям. Графики распределения результирующих напряжений и токов в линиях к моменту времени t_0 приведены соответственно на рис. 2.46,в и 2.47,в.

Если рубильник не замыкается, а размыкается, то режим в цепи представляется как результат наложения на докоммутационный режим волн, возникающих при подключении к концам отключаемой ветви источника тока, равного по величине току в рубильнике до коммутации и противоположного ему по знаку. Например, если в рассмотренной выше схеме (см. рис. 2.44) рубильник не включается, а отключается (рис. 2.48), то эквивалентная схема для определения волн, возникающих при коммутации, будет иметь вид, представленный на рис. 2.49. При этом до коммутации

$$I_{10} = \frac{E_0}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} = 2,57 \text{ кА}; \quad I_{20} = I_{10} \frac{R_2}{R_2 + R_3} = 0,86 \text{ кА};$$

$$I_0 = I_{10} - I_{20} = 1,71 \text{ кА};$$

$$U_{10} = E_0 = 300 \text{ кВ}; \quad U_{20} = I_{20} R_3 = 171 \text{ кВ}.$$

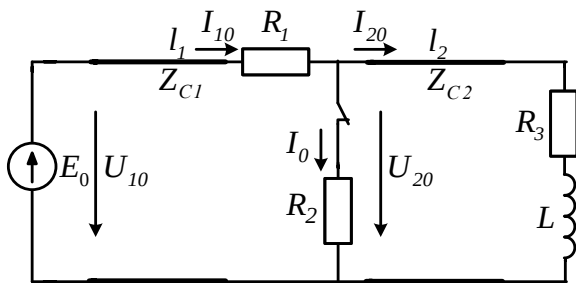


Рис. 2.48

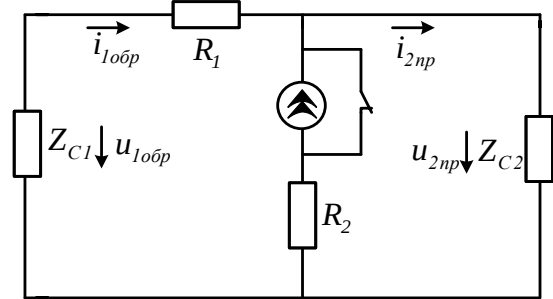


Рис. 2.49

После коммутации из расчета эквивалентной схемы с сосредоточенными параметрами (рис.2.48) будем иметь

$$i_{2i\delta} = I_0 \frac{R_1 + Z_{C1}}{R_1 + Z_{C1} + Z_{C2}} = 0,96 \text{ кА}; \quad i_{1i\delta} = i_{2i\delta} - I_0 = -0,75 \text{ кА};$$

$$u_{1i\delta} = -Z_{C1} i_{1i\delta} = 300 \text{ кВ}; \quad u_{2i\delta} = Z_{C2} i_{2i\delta} = 336 \text{ кВ}.$$

Графики распределения результирующих напряжений и токов в линиях к моменту времени t_0 для данного случая приведены соответственно на рис. 2.50,а и 2.50,б.

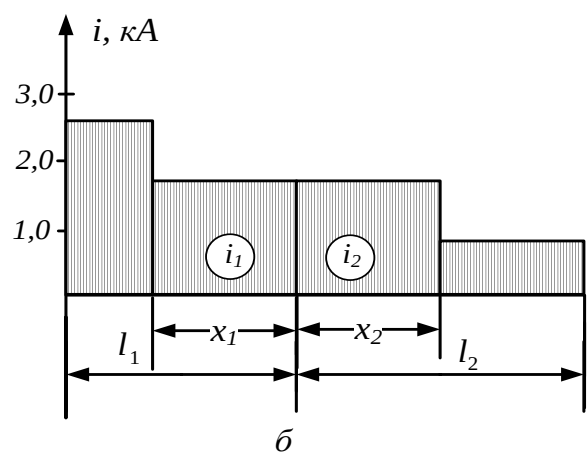
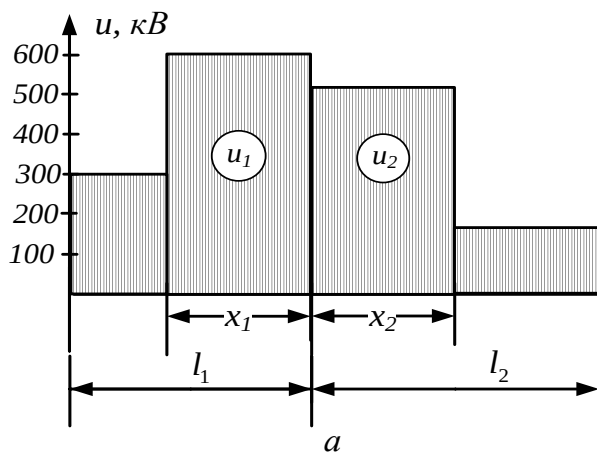
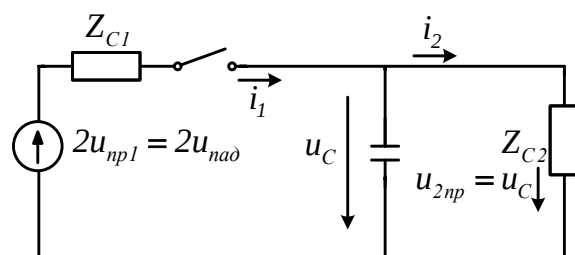
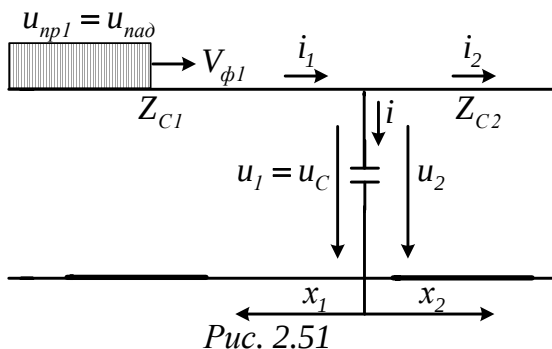


Рис. 2.50

РАСЧЕТ ОТРАЖЕННЫХ И ПРЕЛОМЛЕННЫХ ВОЛН

Пусть возникшая при коммутации волна (например, прямая с прямоугольным фронтом) движется по однородной линии с волновым сопротивлением Z_{C1} . В конце линии она падает на узел, к которому может подключаться другая линия (или ряд линий), а также произвольная сосредоточенная нагрузка. На рис. 2.51 падение волны происходит на узел соединения двух линий с параллельной емкостью.

При указанных положительных направлениях токов волна в первой линии является прямой. Прямой будет и волна, прошедшая (преломившаяся) через узел во вторую линию. В первую же линию пойдет отраженная от узла обратная волна. Согласно этому описанию прямая волна в первой линии может быть названа падающей волной, прямая волна во второй линии — преломленной волной, а обратная волна в первой линии — отраженной волной. Соответственно распределения напряжения и тока в первой линии будут получаться как результат наложения на напряжение и ток падающей волны напряжения и тока отраженной волны. Для второй линии напряжение и ток будут равны напряжению и току преломленной волны. Таким образом, задачей расчета переходного процесса в длинных линиях при падении волн является определение отраженных и преломленных волн. Этот расчет выполняется по эквивалентной схеме с сосредоточенными параметрами на основе правила удвоения волны. В соответствии с этим правилом при падении на узел волны с напряжением $u_{i\dot{a}\ddot{a}}$, движущейся по линии с волновым сопротивлением Z_C , напряжение и ток в этом узле будут такими же, как и при подключении источника с ЭДС, равной напряжению $2u_{i\dot{a}\ddot{a}}$, и внутренним сопротивлением Z_C непосредственно к рассматриваемому узлу.



Рассмотрим это правило на примере схемы рис. 2.51. Эквивалентная схема с сосредоточенными параметрами для расчета отраженных и преломленных волн приведена на рис. 2.52. Из расчета переходного процесса в схеме на рис. 2.52 классическим методом получаем:

$$u_C(t) = \frac{2u_{i\dot{a}\ddot{a}}Z_{C2}}{Z_{C1} + Z_{C2}} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right); \quad \tau = \frac{Z_{C1}Z_{C2}}{Z_{C1} + Z_{C2}} \tilde{N}.$$

По этому закону изменяется результирующее напряжение в конце первой линии и напряжение прямой (преломленной) волны во второй ли-

нии, т.е. $u_C(t) = u_1(t) = u_{2\bar{i}\delta}(t)$. При этом за время $t = 0$ принимается время падения волны на узел включения линий. Закон изменения обратной волны в первой линии для точки соединения линий и конденсатора определится из (2.2):

$$u_{1\bar{i}\delta\delta}(t) = u_1(t) - u_{1\bar{i}\delta}(t) = \frac{u_{\bar{i}\delta\delta}(Z_{C2} - Z_{C1})}{Z_{C2} + Z_{C1}} - \frac{2u_{\bar{i}\delta\delta}Z_{C2}}{Z_{C1} + Z_{C2}} e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

В произвольных сечениях линий с координатами x_1 и x_2 , если отсчитывать x_1 и x_2 от узла включения линий (рис. 2.51), напряжения волн $u_{1\bar{i}\delta\delta}(t)$ и $u_{2\bar{i}\delta}(t)$ будут изменяться по тем же законам, но с запаздыванием $t_{\bar{c}\bar{a}\bar{i}1} = x_1/V_{\delta 1}$ для обратного напряжения в первой линии и запаздыванием $t_{\bar{c}\bar{a}\bar{i}2} = x_2/V_{\delta 2}$ для прямого напряжения во второй линии:

$$u_{1\bar{i}\delta\delta}(x_1, t) = \frac{u_{\bar{i}\delta\delta}(Z_{C2} - Z_{C1})}{Z_{C2} + Z_{C1}} - \frac{2u_{\bar{i}\delta\delta}Z_{C2}}{Z_{C1} + Z_{C2}} e^{-\frac{t-x_1/V_{\delta 1}}{\tau}};$$

$$u_{2\bar{i}\delta}(x_2, t) = \frac{2u_{\bar{i}\delta\delta}Z_{C2}}{Z_{C1} + Z_{C2}} \left(1 - e^{-\frac{t-x_2/V_{\delta 2}}{\tau}} \right).$$

Эти волны напряжений сопровождают волны токов, определение которых выполняется по соотношениям (2.3):

$$i_{1\bar{i}\delta\delta}(x_1, t) = -\frac{u_{1\bar{i}\delta\delta}(x_1, t)}{Z_{C1}}; \quad i_{2\bar{i}\delta}(x_2, t) = \frac{u_{2\bar{i}\delta}(x_2, t)}{Z_{C2}}.$$

Результирующее распределение напряжений и токов в линиях получится как результат наложения отраженных и преломленных волн на напряжения и токи, имевшие место в линиях к рассматриваемому моменту времени.

Если движущаяся по однородной линии с волновым сопротивлением Z_{C1} волна напряжения падает на узел, к которому подключается резистивная нагрузка с сопротивлением R_f (или другая линия с волновым сопротивлением Z_{C2}), то эквивалентная схема с сосредоточенными параметрами для расчета отраженных волн будет иметь вид, приведенный на рис. 2.53. Из расчета этой схемы следует:

$$i_{1\bar{i}\delta\delta} = i_1 - i_{1\bar{i}\delta} = \frac{2u_{1\bar{i}\delta}}{Z_{C1} + R_f} - \frac{u_{1\bar{i}\delta}}{Z_{C1}} = \frac{Z_{C1} - R_f}{Z_{C1} + R_f} \cdot \frac{u_{1\bar{i}\delta}}{Z_{C1}} = \frac{Z_{C1} - R_f}{Z_{C1} + R_f} i_{1\bar{i}\delta} = k_i i_{1\bar{i}\delta};$$

$$u_{1\bar{i}\delta\delta} = u_1 - u_{1\bar{i}\delta} = \frac{2u_{1\bar{i}\delta}R_f}{Z_{C1} + R_f} - u_{1\bar{i}\delta} =$$

$$= \frac{R_f - Z_{C1}}{Z_{C1} + R_f} u_{1\bar{i}\delta} = k_u u_{1\bar{i}\delta},$$

где коэффициенты

$$k_i = \frac{Z_{C1} - R_f}{Z_{C1} + R_f}; \quad k_u = \frac{R_f - Z_{C1}}{Z_{C1} + R_f} \quad (2.5)$$

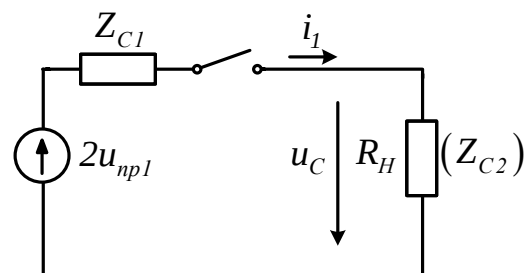


Рис. 2.53

являются коэффициентами отражения соответственно по току и напряжению.

Если линия разомкнута на конце (режим холостого хода), то $R_f = \infty$; $k_i = -1$; $k_u = 1$. При этом $i_{1\hat{f}\hat{a}\hat{\delta}} = k_i i_{1\hat{r}\hat{\delta}} = -i_{1\hat{r}\hat{\delta}}$; $u_{1\hat{f}\hat{a}\hat{\delta}} = k_u u_{1\hat{r}\hat{\delta}} = u_{1\hat{r}\hat{\delta}}$. Если линия замкнута на конце накоротко (режим короткого замыкания), то $R_f = 0$; $k_i = 1$; $k_u = -1$. При этом $i_{1\hat{f}\hat{a}\hat{\delta}} = k_i i_{1\hat{r}\hat{\delta}} = i_{1\hat{r}\hat{\delta}}$; $u_{1\hat{f}\hat{a}\hat{\delta}} = k_u u_{1\hat{r}\hat{\delta}} = -u_{1\hat{r}\hat{\delta}}$.

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Ранее для определения волн, возникающих при коммутациях, была рассмотрена схема, приведенная на рис. 2.44. Пусть в данной схеме требуется найти распределение токов и напряжений в линиях в момент времени $t_0 = 5 \cdot 10^{-4}$ с после коммутации. Параметры схемы: $E_0 = 300$ кВ; $Z_{C1} = 400$ Ом; $Z_{C2} = 350$ Ом; $R_1 = 50$ Ом; $R_2 = 100$ Ом; $R_3 = 200$ Ом; $L = 25 \cdot 10^{-3}$ Гн; длина первой линии $l_1 = 80$ км, длина второй линии $l_2 = 120$ км; скорости распространения волн в линиях $V_{\delta 1} = V_{\delta 2} = V_{\delta} = 3 \cdot 10^5$ км/с.

1. Вначале определим, какие волны токов и напряжений в линиях будут иметь место к заданному моменту времени t_0 . При коммутации в линиях возникают прямые и обратные волны тока и напряжения, которые распространяются по линиям вправо и влево от узла соединения линий. Время распространения волн соответственно по первой t_1 и второй t_2 линиям определится по формулам

$$t_1 = \frac{l_1}{V_{\delta 1}} = 2,67 \cdot 10^{-4} \text{ с}; \quad t_2 = \frac{l_2}{V_{\delta 2}} = 4 \cdot 10^{-4} \text{ с}.$$

Так как $t_1 < t_0$, то обратные волны в первой линии достигнут ее начала и в первой линии возникнут прямые (отраженные) волны, которые к моменту времени t_0 пройдут расстояние $x_{\delta \delta 1} = (t_0 - t_1)V_{\delta 1} \approx 70$ км от ее начала. Аналогичным образом, так как $t_2 < t_0$, прямые волны, образовавшиеся после коммутации во второй линии, достигнут ее конца и во второй линии возникнут обратные волны, которые к моменту времени t_0 пройдут расстояние $x_{\delta \delta 2} = (t_0 - t_2)V_{\delta 2} = 30$ км от ее конца. Положение фронтов волн в линиях к моменту времени t_0 поясняет рис. 2.54.

2. Как было рассмотрено выше, до коммутации напряжения и токи в линиях были равны:

$$I_{10} = I_{20} = \frac{E_0}{R_1 + R_3} = 1,2 \text{ кА}; \quad U_{10} = E_0 = 300 \text{ кВ}; \quad U_{20} = I_{20} R_3 = 240 \text{ кВ}.$$

3. Для определения волн, возникающих при коммутации, составляется эквивалентная схема с сосредоточенными параметрами, которая приведена на рис. 2.45. Расчет волн, возникающих в линиях при замыкании рубильника, был произведен ранее, при этом

$$i_{1\hat{a}\delta} = 0,354 \text{ кА}; i_{2\hat{r}\delta} = -0,455 \text{ кА}; u_{2\hat{r}\delta} = -159 \text{ кВ}; u_{1\hat{a}\delta} = -141 \text{ кВ}.$$

4. Для определения прямых (отраженных) волн напряжения и тока в первой линии составляем эквивалентную схему, представленную на рис. 2.55. Так как источник с ЭДС E_0 был уже учтен при определении токов и напряжений докоммутационного режима, то в эквивалентной схеме в соответствии с принципом суперпозиции необходимо положить $E_0 = 0$, то есть заменить источник ЭДС проводом, не имеющим сопротивления. Тогда, согласно (2.5), $k_{1i} = 1$; $k_{1u} = -1$. При этом

$$i_{1\hat{r}\delta} = i_{1\hat{r}\delta} = k_{1i} i_{1\hat{a}\delta} = i_{1\hat{a}\delta} = 0,354 \text{ кА}; u_{1\hat{r}\delta} = u_{1\hat{r}\delta} = k_{1u} u_{1\hat{a}\delta} = -u_{1\hat{a}\delta} = 141 \text{ кВ}.$$

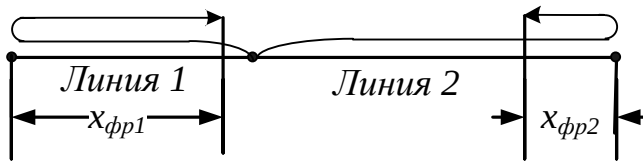


Рис. 2.54

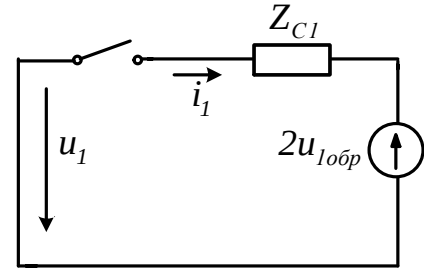


Рис. 2.55

Как следует из полученных выражений, прямые (отраженные) волны в первой линии будут иметь прямоугольный фронт.

5. Для определения обратных волн напряжения и тока во второй линии эквивалентная схема будет иметь вид, приведенный на рис. 2.56. Из расчета переходного процесса этой схемы при нулевых начальных условиях находим

$$i_2(t) = \frac{2u_{2\hat{r}\delta}}{Z_{C2} + R_3} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) = -0,578 \left(1 - e^{-22000t} \right),$$

$$\text{где } \tau = \frac{L}{Z_{C2} + R_3} = 4,545 \cdot 10^{-5} \text{ с}.$$

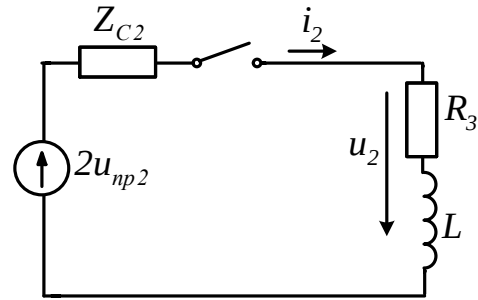


Рис. 2.56

В полученном выражении $i_2(t)$ за время $t=0$ принимается время падения прямой волны на конец второй линии. Если за время $t=0$ принять момент коммутации в схеме рис. 2.44, то в зависимости $i_2(t)$ нужно учесть время движения волны по второй линии, т.е. формально заменить t на $t - t_2$. Тогда

$$i_2(t) = \frac{2u_{2\hat{r}\delta}}{Z_{C2} + R_3} \left(1 - e^{-\frac{t-t_2}{\tau}} \right) = -0,578 \left(1 - e^{-22000(t-4 \cdot 10^{-4})} \right).$$

Закон изменения во времени тока обратной (отраженной) волны в конце второй линии определится по формуле (2.2):

$$i_{2\hat{i}\hat{a}\hat{\delta}}(t) = i_2(t) - i_{2\hat{i}\hat{\delta}}(t) = -0,123 + 0,578e^{-22000(t-4\cdot 10^{-4})}.$$

Для получения зависимости $i_{2\hat{i}\hat{a}\hat{\delta}}(x_2, t)$, т.е. выражения тока обратной волны в произвольном сечении второй линии, нужно учесть время запаздывания $t_{\hat{c}\hat{a}\hat{i}2} = x_2/V_{\hat{\delta}2}$:

$$i_{2\hat{i}\hat{a}\hat{\delta}}(x_2, t) = -0,123 + 0,578e^{-22000(t-4\cdot 10^{-4}-x_2/V_{\hat{\delta}2})}. \quad (2.6)$$

В последнем выражении x_2 отсчитывается от конца второй линии к ее началу. Необходимо отметить, что это выражение справедливо только начиная с момента времени, когда обратная волна тока достигнет точки x_2 , т.е. для момента времени $t \geq 4 \cdot 10^{-4} + x_2/V_{\hat{\delta}2}$.

Обратная волна напряжения во второй линии определится по формуле

$$u_{2\hat{i}\hat{a}\hat{\delta}}(x_2, t) = -i_{2\hat{i}\hat{a}\hat{\delta}}(x_2, t)Z_{C2} = 43,05 - 202,3e^{-22000(t-4\cdot 10^{-4}-x_2/V_{\hat{\delta}2})}. \quad (2.7)$$

6. Зная токи и напряжения в линиях до коммутации и все волны токов и напряжений в линиях, найдем распределение токов и напряжений в линиях к моменту времени $t_0 = 5 \cdot 10^{-4}$ с.

Первая линия. В первой линии на расстоянии $0 \leq x_1 \leq x_{\hat{\delta}\hat{\delta}1} \approx 70$ км (x отсчитывается от начала первой линии) результирующие токи и напряжения будут складываться из токов и напряжений до коммутации, обратных волн токов и напряжений, возникших после коммутации, а также прямых (отраженных) волн, которые дойдут до точки $x_{\hat{\delta}\hat{\delta}1}$ к моменту времени t_0 . На расстоянии $x_{\hat{\delta}\hat{\delta}1} < x_1 \leq l_1$ в первой линии к моменту времени t_0 прямых (отраженных) волн тока и напряжения еще не будет. Таким образом,

$$\text{для } 0 \leq x_1 \leq x_{\hat{\delta}\hat{\delta}1}: i_1(x_1, t_0) = I_{10} + i_{1\hat{i}\hat{a}\hat{\delta}}(x_1, t_0) + i_{1\hat{i}\hat{\delta}}(x_1, t_0) = 1,908 \text{ кА},$$

$$u_1(x_1, t_0) = U_{10} + u_{1\hat{i}\hat{a}\hat{\delta}}(x_1, t_0) + u_{1\hat{i}\hat{\delta}}(x_1, t_0) = 300 \text{ кВ};$$

$$\text{для } x_{\hat{\delta}\hat{\delta}1} < x_1 \leq l_1: i_1(x_1, t_0) = I_{10} + i_{1\hat{i}\hat{a}\hat{\delta}}(x_1, t_0) = 1,554 \text{ кА},$$

$$u_1(x_1, t_0) = U_{10} + u_{1\hat{i}\hat{a}\hat{\delta}}(x_1, t_0) = 159 \text{ кВ}.$$

Поскольку все волны в первой линии имеют прямоугольный фронт на соответствующих отрезках линии все токи и напряжения имеют постоянные значения, не зависящие от координаты к моменту времени x_1 .

Вторая линия. Если по аналогии с первой линией x_2 отсчитывать от начала второй линии, то на расстоянии $0 \leq x_2 < l_2 - x_{\hat{\delta}\hat{\delta}2} = 90$ км к моменту времени t_0 будут иметь место только токи и напряжения докоммутационного режима и прямые волны, возникшие при коммутации. На расстоянии $l_2 - x_{\hat{\delta}\hat{\delta}2} \leq x_2 < l_2$ к этим значениям добавятся обратные (отраженные) волны. Поскольку обратные волны тока и напряжения имеют непрямоугольный фронт, то, чтобы получить их зависимость от x_2 , отсчитываемого от

начала линии, к моменту времени t_0 , нужно в выражениях (2.6) и (2.7) x_2 заменить на $l_2 - x_2$, а вместо t подставить t_0 . Таким образом,

$$\text{для } 0 \leq x_2 < l_2 - x_{\delta\delta 2}: i_2(x_2, t_0) = I_{20} + i_{2\bar{i}\delta}(x_2, t_0) = 0,745 \text{ кА},$$

$$u_2(x_2, t_0) = U_{20} + u_{2\bar{i}\delta}(x_2, t_0) = 81 \text{ кВ};$$

$$\text{для } l_2 - x_{\delta\delta 2} \leq x_2 \leq l_2:$$

$$i_2(x_2, t_0) = I_{20} + i_{2\bar{i}\delta}(x_2, t_0) + i_{2\hat{i}\hat{\alpha}\hat{\delta}}(x_2, t_0) = 0,745 - 0,123 + 0,578e^{-22000\left(t_0 - 4 \cdot 10^{-4} - \frac{l_2 - x_2}{V_{\delta 2}}\right)} =$$

$$= 0,622 + 0,578e^{-22000\left(5 \cdot 10^{-4} - 4 \cdot 10^{-4} - \frac{120 - x_2}{3 \cdot 10^5}\right)} = 0,622 + 0,578e^{(6,6 - 0,0733x_2)} \text{ кА},$$

$$u_2(x_2, t_0) = U_{20} + u_{2\bar{i}\delta}(x_2, t_0) + u_{2\hat{i}\hat{\alpha}\hat{\delta}}(x_2, t_0) = 81 + 43,05 - 202,3e^{-22000\left(t_0 - 4 \cdot 10^{-4} - \frac{l_2 - x_2}{V_{\delta 2}}\right)} =$$

$$= 124,05 - 202,3e^{-22000\left(5 \cdot 10^{-4} - 4 \cdot 10^{-4} - \frac{120 - x_2}{3 \cdot 10^5}\right)} = 124,05 - 202,3e^{(6,6 - 0,0733x_2)} \text{ кВ}.$$

Распределение значений тока и напряжения обратных волн, а также их результирующих значений на участке второй линии $l_2 - x_{\delta\delta 2} \leq x_2 \leq l_2$ к моменту времени t_0 приведено в табл. 2.3.

Таблица 2.3. Результаты расчета волн на втором участке

x_2 , км	$i_{2\hat{i}\hat{\alpha}\hat{\delta}}$, кА	$u_{2\hat{i}\hat{\alpha}\hat{\delta}}$, кВ	i_2 , кА	u_2 , кВ
90	0,455	-159	1,2	-78
95	0,278	-97	1,02	-16
100	0,155	-54	0,9	27
105	0,07	-24	0,8	57
110	0,01	-3,6	0,755	77,4
115	-0,03	10,7	0,714	91,7
120	-0,06	20,6	0,686	101,6

Распределение токов и напряжений в первой и второй линиях к моменту времени t_0 приведено на рис. 2.57.

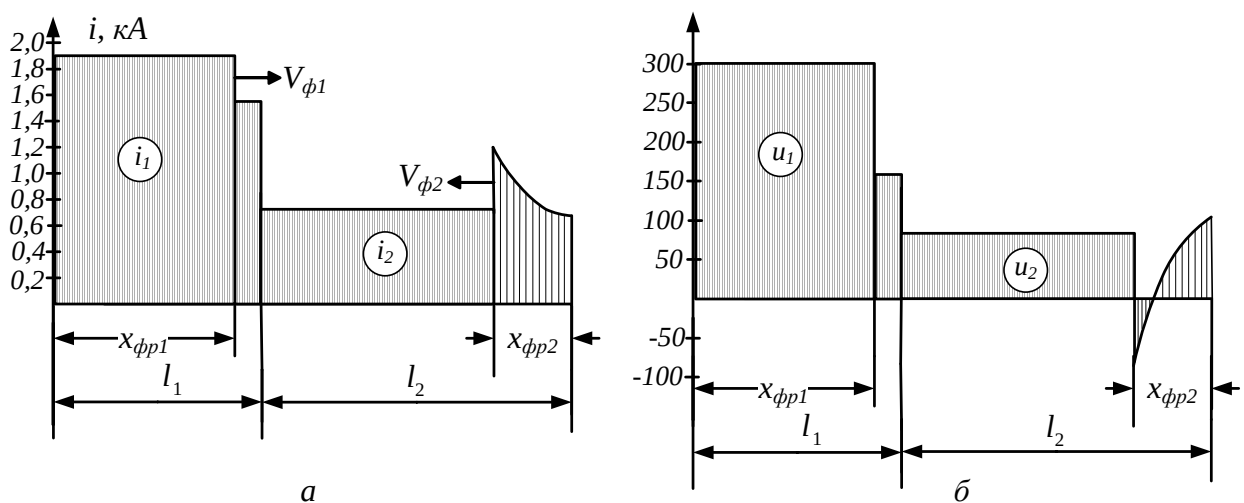


Рис. 2.57

ЗАДАНИЕ 3. НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ И МАГНИТНЫЕ ЦЕПИ ПРИ ПОСТОЯННЫХ ТОКАХ И МАГНИТНЫХ ПОТОКАХ

Задание 3 имеет два уровня сложности. **Первый уровень** включает в себя две задачи по расчету нелинейных цепей: первая — электрической цепи при постоянных токах (рис. 3.1÷3.8) (задача 3.1), вторая — магнитной цепи при постоянных потоках (задача 3.2). **Второй уровень** включает в себя одну задачу по расчету нелинейной электрической цепи при постоянных токах (задача 3.1).

Задача 3.1. По данным, помещенным в табл. 3.1, выполнить следующее

1. Определить ток в ветви с нелинейным резистором (НР).
2. Определить ток в ветви с линейным резистором, указанным в крайнем справа столбце табл. 3.1.

Примечание: вольт-амперная характеристика (ВАХ) нелинейного резистора задана аналитической функцией $I = aU^2$, приведенной под расчетной схемой, где I – в амперах (А), U – в вольтах (В).

Таблица 3.1. Значения параметров нелинейных электрических цепей

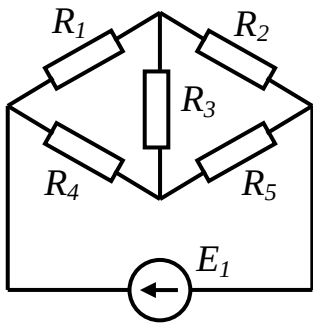
Номер вари- анта	Но- мер схе- мы	Нели- ней- ный рези- стор	E_1 , В	E_2 , В	J , А	R_1 , Ом	R_2 , Ом	R_3 , Ом	R_4 , Ом	R_5 , Ом	R_6 , Ом	Линей- ный резистор с иско- мым током
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	3.1	R1	72	-	-	НР	8	20	8	12	-	R2
2	3.1	R2	44	-	-	8	НР	9	10	5	-	R3
3	3.1	R3	180	-	-	10	20	НР	20	10	-	R4
4	3.1	R4	80	-	-	10	20	10	НР	10	-	R5
5	3.1	R5	48	-	-	12	12	16	16	НР	-	R1
6	3.2	R1	20	-	4	НР	10	20	10	20	-	R2
7	3.2	R2	40	-	3	10	НР	5	6	4	-	R3
8	3.2	R3	100	-	5	10	3	НР	7	3	-	R4
9	3.2	R4	20	-	5	10	6	4	НР	3	-	R5
10	3.2	R5	48	-	12	8	4	4	6	НР	-	R1
11	3.3	R1	30	34	-	НР	15	4	6	10	10	R2
12	3.3	R2	45	28	-	10	НР	24	7	8	12	R3
13	3.3	R3	50	70	-	8	8	НР	2	60	10	R4
14	3.3	R4	70	40	-	12	2	4	НР	35	5	R5
15	3.3	R5	34	30	-	10	10	15	4	НР	6	R6
16	3.3	R6	40	25	-	12	14	6	4	15	?	R1
17	3.4	R1	24	-	-	НР	4	4	3	1	-	R2
18	3.4	R2	36	-	-	5	НР	7	9	3	-	R3
19	3.4	R3	20	-	-	8	11	НР	4	7	-	R4
20	3.4	R4	32	-	-	7	15	4	НР	8	-	R5
21	3.4	R5	28	-	-	15	5	7	9	НР	-	R1

Продолжение табл. 3.1

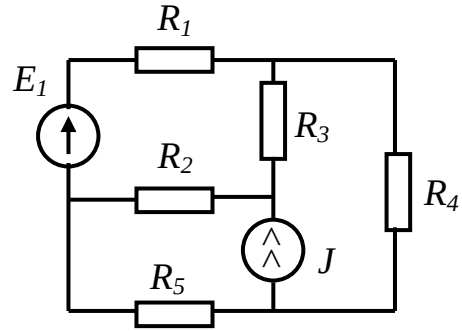
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
22	3.5	R1	70	-	-	HP	40	20	15	20	17	R2
23	3.5	R2	80	-	-	16	HP	20	38	50	10	R3
24	3.5	R3	20	-	-	3	8	HP	7	6	2	R4
25	3.5	R4	56	-	-	7	10	20	HP	14	9	R5
26	3.5	R5	36	-	-	11	8	7	15	HP	20	R6
27	3.5	R6	40	-	-	8	9	3	6	14	HP	R1
28	3.6	R1	40	90	-	HP	38	70	25	50	60	R2
29	3.6	R2	28	10	-	15	HP	37	40	25	10	R3
30	3.6	R3	16	100	-	29	45	HP	30	12	15	R4
31	3.6	R4	20	45	-	16	90	25	HP	25	10	R5
32	3.6	R5	50	100	-	20	15	50	40	HP	35	R6
33	3.6	R6	18	27	-	30	25	14	17	30	HP	R1
34	3.7	R1	20	100	-	HP	15	10	17	20	30	R2
35	3.7	R2	15	30	-	10	HP	20	40	6	4	R3
36	3.7	R3	12	25	-	14	8	HP	15	10	20	R4
37	3.7	R4	40	10	-	4	10	12	HP	9	11	R5
38	3.7	R5	20	30	-	6	9	15	20	HP	7	R6
39	3.7	R6	10	28	-	10	30	15	45	10	HP	R1
40	3.8	R1	20	7	-	HP	34	43	20	50	15	R2
41	3.8	R2	25	9	-	24	HP	56	37	20	30	R3
42	3.8	R3	10	25	-	50	60	HP	20	30	18	R4
43	3.8	R4	15	7	-	3	9	15	HP	8	7	R5
44	3.8	R5	25	8	-	7	12	20	10	HP	10	R6
45	3.8	R6	120	70	-	20	30	30	27	20	HP	R1
46	3.1	R1	78	-	-	HP	10	25	10	15	-	R3
47	3.1	R2	50	-	-	10	HP	8	12	7	-	R4
48	3.1	R3	150	-	-	20	30	HP	35	10	-	R5
49	3.1	R4	90	-	-	20	30	15	HP	15	-	R1
50	3.1	R5	40	-	-	15	17	20	18	HP	-	R2
51	3.2	R1	30	-	5	HP	15	30	10	25	-	R3
52	3.2	R2	50	-	4	15	HP	7	12	6	-	R4
53	3.2	R3	150	-	7	15	5	HP	10	6	-	R5
54	3.2	R4	30	-	6	14	8	6	HP	5	-	R1
55	3.2	R5	60	-	14	12	6	7	8	HP	-	R2
56	3.3	R1	40	50	-	HP	25	6	10	15	14	R3
57	3.3	R2	60	38	-	14	HP	30	10	12	16	R4
58	3.3	R3	70	90	-	20	16	HP	5	92	15	R5
59	3.3	R4	100	60	-	24	4	7	HP	50	8	R6
60	3.3	R5	45	42	-	15	20	21	7	HP	9	R1
61	3.3	R6	60	29	-	18	20	10	7	20	HP	R2
62	3.4	R1	30	-	-	HP	6	6	4	3	-	R3
63	3.4	R2	35	-	-	7	HP	10	12	5	-	R4
64	3.4	R3	25	-	-	14	16	HP	7	8	-	R5
65	3.4	R4	40	-	-	10	21	8	HP	12	-	R1
66	3.4	R5	50	-	-	28	10	14	20	HP	-	R2
67	3.5	R1	60	-	-	HP	45	28	20	25	24	R3
68	3.5	R2	70	-	-	14	HP	18	36	40	9	R4

Окончание табл. 3.1

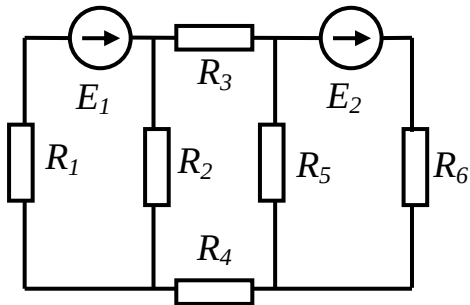
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
69	3.5	R3	30	-	-	5	12	HP	10	8	3	R5
70	3.5	R4	28	-	-	3	5	9	HP	7	4	R6
71	3.5	R5	19	-	-	5	4	3	7	HP	10	R1
72	3.5	R6	50	-	-	12	9	4	17	25	HP	R2
73	3.6	R1	60	150	-	HP	45	100	38	50	60	R3
74	3.6	R2	56	20	-	30	HP	70	50	40	25	R4
75	3.6	R3	30	50	-	10	20	HP	17	18	20	R5
76	3.6	R4	40	80	-	30	150	30	HP	45	20	R6
77	3.6	R5	75	120	-	30	20	75	60	HP	50	R1
78	3.6	R6	50	80	-	90	75	40	50	70	HP	R2
79	3.7	R1	15	70	-	HP	8	12	15	16	20	R3
80	3.7	R2	8	15	-	6	HP	10	15	4	7	R4
81	3.7	R3	18	40	-	28	14	HP	20	15	30	R5
82	3.7	R4	20	8	-	3	7	8	HP	5	6	R6
83	3.7	R5	40	60	-	12	20	30	50	HP	15	R1
84	3.7	R6	15	20	-	15	40	20	60	15	HP	R2
85	3.8	R1	30	14	-	HP	60	80	40	100	30	R3
86	3.8	R2	50	20	-	40	HP	100	70	38	60	R4
87	3.8	R3	15	40	-	75	90	HP	30	50	36	R5
88	3.8	R4	30	15	-	6	20	30	HP	15	20	R6
89	3.8	R5	50	15	-	15	25	40	20	HP	20	R1
90	3.8	R6	60	40	-	10	15	15	18	10	HP	R2
91	3.1	R1	95	-	-	HP	10	24	11	15	-	R4
92	3.1	R2	40	-	-	10	HP	12	15	3	-	R5
93	3.1	R3	135	-	-	15	28	HP	28	15	-	R1
94	3.1	R4	85	-	-	16	20	18	HP	17	-	R2
95	3.1	R5	45	-	-	15	10	12	20	HP	-	R3
96	3.2	R1	40	-	8	HP	15	20	20	45	-	R4
97	3.2	R2	80	-	6	20	HP	10	10	8	-	R5
98	3.2	R3	180	-	10	18	6	HP	14	6	-	R1
99	3.2	R4	40	-	9	20	12	7	HP	6	-	R2
100	3.2	R5	90	-	25	16	8	7	12	HP	-	R3



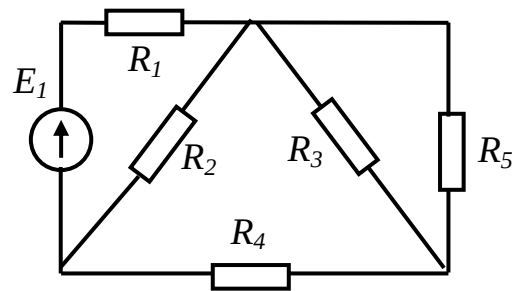
$BAX HP: I = 0,025U^2$
Puc. 3.1



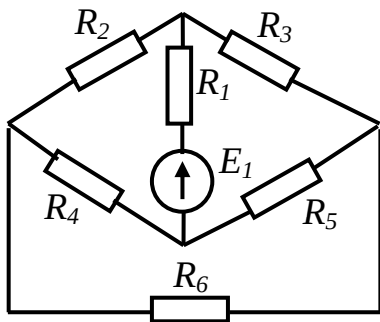
$BAX HP: I = 0,002U^2$
Puc. 3.2



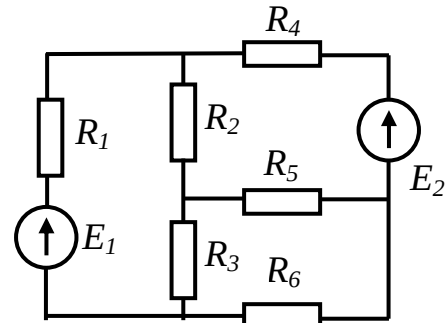
$BAX HP: I = 0,003U^2$
Puc. 3.3



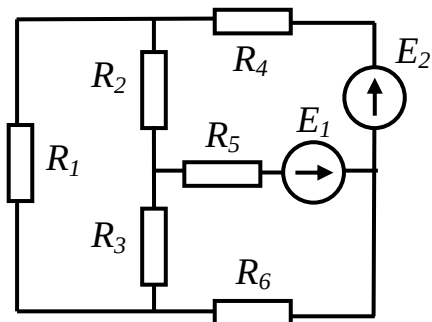
$BAX HP: I = 0,004U^2$
Puc. 3.4



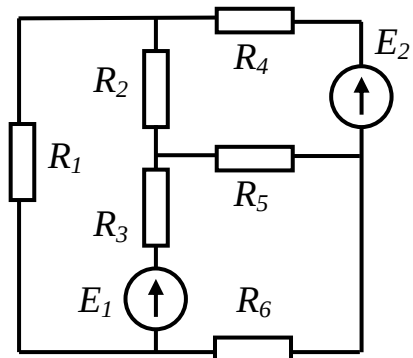
$BAX HP: I = 0,0035U^2$
Puc. 3.5



$BAX HP: I = 0,003U^2$
Puc. 3.6



$BAX HP: I = 0,002U^2$
Puc. 3.7



$BAX HP: I = 0,0025U^2$
Puc. 3.8

Задача 3.2. По данным, приведенным в табл. 3.2, выполнить следующее

1. Для указанных на рис. 3.9 направлений потоков определить намагничивающие силы (НС) обмоток.

2. В соответствии с найденными значениями НС обмоток определить действительные направления токов в обмотках.

3. Рассчитать магнитные сопротивления R_{m1} , R_{m2} и R_{m3} участков магнитопровода.

4. Нарисовать эквивалентную электрическую схему замещения магнитной цепи.

5. Записать уравнение состояния магнитной цепи по законам Кирхгофа для магнитной цепи.

Примечания: 1. Кривая намагничивания $B(H)$ стали, из которой изготовлен магнитопровод, задана в табл. 3.3.

2. Расчетная схема магнитной цепи рисуется с указанием обмоток и воздушных зазоров, соответствующих конкретному варианту задания.

3. В табл. 3.2 S_1 , S_2 , S_3 — поперечные сечения левой, средней и правой ветвей магнитопровода соответственно.

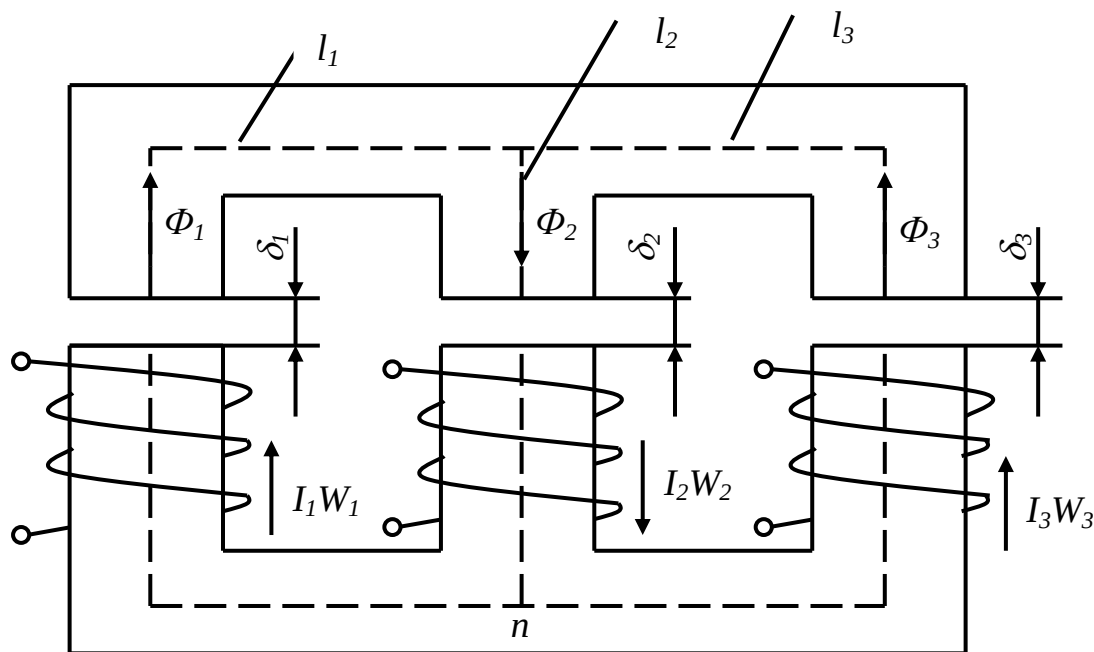


Рис. 3.9

Таблица 3.2. Значения параметров нелинейной магнитной цепи

Номер вари- анта	$I_1 W_1$, А	$I_2 W_2$, А	$I_3 W_3$, А	δ_1 , мм	δ_2 , мм	δ_3 , мм	$\Phi_1 \times$ $\times 10^{-4}$, Вб	$\Phi_2 \times$ $\times 10^{-4}$, Вб	$\Phi_3 \times$ $\times 10^{-4}$, Вб	l_1 , мм	l_2 , мм	l_3 , мм	S_1 , см ²	S_2 , см ²	S_3 , см ²
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	?	?	-	0,1	0	0	1	?	2	35	17	40	0,8	3	2
2	?	?	-	0	0,1	0	1,5	?	2,1	40	20	45	1,5	3	2
3	?	?	-	0	0	0,1	?	6	3,2	32	15	37	2,4	5	3
4	?	-	?	0,15	0	0	3	5	?	37	16	42	2,8	4,5	2
5	?	-	?	0	0,15	0	2,2	4	?	30	14	35	2	3,5	3
6	?	-	?	0	0	0,15	?	3	1,8	42	20	47	1,5	2,5	2
7	-	?	?	0,12	0	0	5	?	2	48	21	53	4,5	6	1,8
8	-	?	?	0	0,12	0	2,1	?	4	33	15	38	1,8	5,8	3,5
9	-	?	?	0	0	0,12	1,5	5	?	36	16	41	2,5	5	4
10	?	?	-	0,11	0	0	2	4,5	-	39	18	44	2	4	3
11	?	?	-	0	0,11	0	2,1	?	1,5	41	19	46	2,1	3	1,9
12	?	?	-	0	0	0,11	2	5	?	49	20	54	1,8	4,5	4
13	?	-	?	0,13	0	0	?	4	1	38	17	43	2,5	3,8	1
14	?	-	?	0	0,13	0	2	?	3	47	21	52	1,8	4,6	2,8

Продолжение табл.3.2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
15	?	-	?	0	0	0,13	3,6	6	?	32	14	37	3,5	4,9	2,4
16	-	?	?	0,14	0	0	?	5	2,4	36	15	41	3	4,5	2
17	-	?	?	0	0,14	0	1,5	3,6	?	46	16	51	1,4	3,5	2,1
18	-	?	?	0	0	0,14	1,8	5	?	42	20	47	1,8	4,6	4,5
19	-	?	-	0	0,15	0	?	5	?	44	21	44	2,4	5	2,4
20	-	?	-	0,1	0	0,1	2	?	?	34	16	34	1,8	3,8	1,8
21	-	?	-	0	0,12	0	?	?	3	30	12	30	2,8	5,5	2,8
22	-	?	-	0,11	0	0,11	?	3	?	40	19	40	1,5	2,8	1,5
23	?	?	-	0,15	0	0	4	?	2,1	43	21	48	3,5	5,8	1,8
24	-	?	?	0	0,15	0	3	?	4	33	14	38	2,8	6	3,6
25	?	-	?	0	0	0,15	2	6	?	50	20	55	2	5,8	3,5
26	?	?	-	0,2	0	0	1	?	3	51	23	54	1	3,8	2,6
27	?	?	-	0	0,2	0	1,5	?	2,8	53	25	56	1,5	5	2,8
28	?	?	-	0	0	0,2	?	7	4	55	24	58	2,9	6,8	3,5
29	?	-	?	0,25	0	0	4	7	?	60	22	63	3,8	6,9	3
30	?	-	?	0	0,25	0	3	5	?	63	30	66	2,9	4,8	2,1
31	?	-	?	0	0	0,25	?	3,5	1,6	62	31	65	2	3,2	1,4
32	-	?	?	0,22	0	0	4	?	3	58	25	63	3,7	6,9	2,9
33	-	?	?	0	0,22	0	2	?	3	65	30	68	1,8	4,8	2,9

Продолжение табл.3.2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
34	-	?	?	0	0	0,22	1,8	5	?	57	28	60	1,9	5,6	3
35	?	?	-	0,21	0	0	3	4,8	?	68	31	71	2,9	4,5	2
36	?	?	-	0	0,21	0	2	?	1,8	52	25	55	1,8	3,5	2
37	?	?	-	0	0	0,21	2,5	6	?	54	26	57	2,8	5,8	3,6
38	?	-	?	0,23	0	0	?	4,5	2	64	31	67	2,4	3,9	1,8
39	?	-	?	0	0,23	0	2,5	?	3,5	60	30	63	2,3	6,2	3,5
40	?	-	?	0	0	0,23	3,6	7	?	69	32	72	3,7	6,8	4
41	-	?	?	0,24	0	0	?	6	3,5	59	28	62	2,8	5,8	3,4
42	-	?	?	0	0,24	0	1,7	3,8	?	63	30	68	2	4	2,1
43	-	?	?	0	0	0,24	1,3	5,3	?	58	25	63	1,2	5	3,8
44	-	?	-	0	0,25	0	?	5,5	?	59	26	59	3	5,4	3
45	-	?	-	0,2	0	0,2	2,5	?	?	69	31	69	2,6	4,9	2,6
46	-	?	-	0	0,22	0	?	?	3,5	52	20	52	3,3	8	3,3
47	-	?	-	0,22	0	0,22	?	3,3	?	65	30	65	2	3	2
48	?	?	-	0,25	0	0	4,3	?	2,3	55	26	60	4,2	6,6	3
49	-	?	?	0	0,25	0	3,5	?	4,5	57	28	62	3,3	7,5	4,3
50	?	-	?	0	0	0,25	2,5	6,5	?	63	30	68	2,4	6,8	3,5
51	?	?	-	0,3	0	0	1,8	?	2,8	71	35	78	2	4,5	3
52	?	?	-	0	0,3	0	2,3	?	2,9	73	36	80	2,3	5	2,8

Продолжение табл.3.2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
53	?	?	-	0	0	0,3	?	6,8	3,8	75	35	82	3	6,7	3,8
54	?	-	?	0,35	0	0	3,8	5,8	?	77	34	84	3,6	5,7	2
55	?	-	?	0	0,35	0	2,8	4,8	?	87	40	94	2,8	4,8	1,8
56	?	-	?	0	0	0,35	?	3,5	2,3	85	41	92	1,2	3,6	2,2
57	-	?	?	0,37	0	0	5,5	?	2,5	83	42	90	5,3	8	3
58	-	?	?	0	0,37	0	2,5	?	4,5	81	40	88	3	6,8	5
59	-	?	?	0	0	0,37	2	5,8	?	72	35	79	1,8	5,9	3,9
60	?	?	0	0,31	0	0	2	5	?	74	36	81	1,9	4,8	3
61	?	?	0	0	0,31	0	3,1	?	2,5	76	37	83	3	5,5	2,8
62	?	?	0	0	0	0,31	3	7	?	78	30	85	2,8	6,8	5
63	?	-	?	0,33	0	0	?	5	2	88	41	95	3	6	1,8
64	?	-	?	0	0,33	0	2,2	?	4	86	42	93	2,8	6,4	3,9
65	?	-	?	0	0	0,33	3,3	6	?	84	40	91	3,2	5,8	3
66	-	?	?	0,44	0	0	?	5,2	2,4	82	40	89	3	5	2,5
67	-	?	?	0	0,44	0	1,8	3,7	?	86	39	87	1,9	3,8	2
68	-	?	?	0	0	0,44	2	5	?	79	38	86	1,9	4,8	3,1
69	-	?	-	0	0,35	0	?	6	?	69	35	69	2,8	6,1	2,8
70	-	?	-	0,3	0	0,3	3	?	?	65	32	65	2,9	5,9	2,9
71	-	?	-	0	0,32	0	?	?	4	63	31	63	3,9	8	3,9

Продолжение табл.3.2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
72	-	?	-	0,31	0	0,31	?	4	?	88	41	88	1,9	4	1,9
73	?	?	-	0,35	0	0	5	?	3	80	38	87	5,5	7,8	2,5
74	-	?	?	0	0,35	0	2	?	3	90	44	97	2	4,8	2,9
75	?	-	?	0	0	0,35	3	7	?	85	42	92	3	6,8	5
76	?	?	-	0,4	0	0	1,6	?	2,8	100	48	105	1,5	4,5	2,7
77	?	?	-	0	0,4	0	2	?	3,8	105	50	110	1,8	5,6	3,6
78	?	?	-	0	0	0,4	?	7	3,8	95	45	100	3	6,8	3,6
79	?	-	?	0,45	0	0	3,5	6	?	93	46	100	3,6	5,8	2,4
80	?	-	?	0	0,45	0	2,5	4	?	103	50	110	2,8	3,8	1,5
81	?	-	?	0	0	0,45	?	4	2,5	107	52	115	1,5	3,8	2,6
82	-	?	?	0,52	0	0	4	?	2,5	99	45	104	4,1	6,8	2,5
83	-	?	?	0	0,52	0	2,2	?	3,2	94	46	99	2,1	5,5	3,1
84	-	?	?	0	0	0,52	2,6	6	?	104	51	110	2,4	6,2	3,6
85	?	?	-	0,51	0	0	2,2	4,3	?	96	47	101	2,1	4,2	2,2
86	?	?	-	0	0,51	0	3,1	?	1,6	97	46	102	3	4,7	1,5
87	?	?	-	0	0	0,51	2	3	?	107	52	112	1,8	2,9	1,1
88	?	-	?	0,53	-	-	?	5	2	104	50	110	3,2	5	1,8
89	?	-	?	-	0,53	-	3	?	4	94	51	100	3,1	6,9	4
90	?	-	?	-	-	0,53	3,5	6,2	?	102	52	108	3,6	6	2,7

Окончание табл.3.2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
91	-	?	-	0	0,55	0	?	4	?	104	53	104	2	3,8	2
92	-	?	-	0,5	0	0,5	2,4	?	?	98	48	98	2,5	5	2,5
93	-	?	-	0,41	0	0,41	?	?	2,3	108	54	108	2,2	4	2,2
94	-	?	-	0	0,42	0	?	3,5	?	115	60	115	1,9	3,7	1,9
95	-	?	?	0,45	0	0	?	8	3,5	110	55	115	5	7,8	3,6
96	-	?	?	0	0,45	0	1,6	4	?	114	57	119	1,5	3,9	2,5
97	-	?	?	0	0	0,45	2,8	4	?	116	52	120	2,7	3,9	1,2
98	?	?	-	0,65	0	0	4,5	?	2	96	51	100	4,8	6,5	1,9
99	-	?	?	0	0,65	0	3,5	?	4	98	50	101	3,6	8	3,9
100	?	-	?	0	0	0,65	3,2	?	4,2	100	49	105	3,1	7,5	4,6

Таблица 3.3. Зависимость В(Н) для материала сердечника

В , Тл	Н , А/м	В , Тл	Н , А/м	В , Тл	Н , А/м
0,25	50	1,2	390	1,56	6000
0,4	64	1,25	530	1,6	7800
0,6	88	1,3	700	1,65	10000
0,7	113	1,35	1000	1,7	13000
0,8	138	1,4	1500	1,75	18000
0,9	170	1,42	2000	1,8	23000
1,0	210	1,45	2800	1,9	34000
1,1	250	1,5	4200	2,0	70000

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ К ЗАДАНИЮ 3

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

Нелинейными называются цепи, в состав которых входит хотя бы один нелинейный элемент.

Нелинейными называются элементы, параметры которых зависят от величины и (или) направления связанных с этими элементами переменных (напряжения, тока, магнитного потока, заряда, температуры, светового потока и др.). Нелинейные элементы описываются нелинейными характеристиками, которые не имеют строгого аналитического выражения, определяются экспериментально и задаются таблично или графически.

По количеству полюсов, с помощью которых нелинейные элементы подсоединяются к электрической цепи, их можно разделить на двух- и многополюсные. В зависимости от того, являются или нет их характеристики функциями скорости изменения переменных нелинейные элементы делятся соответственно на инерционные и безынерционные. По типу характеристик нелинейные элементы различаются на элементы с однозначной и неоднозначной характеристиками.

Нелинейные свойства электрических цепей постоянного тока определяет наличие в них нелинейных резисторов.

В связи с отсутствием у нелинейных резисторов прямой пропорциональности между напряжением и током их нельзя охарактеризовать одним параметром (одним значением R). Соотношение между этими величинами в общем случае зависит не только от их мгновенных значений, но и от производных и интегралов по времени.

Параметры нелинейных резисторов

В зависимости от условий работы нелинейного резистора и характера задачи различают статическое, дифференциальное и динамическое сопротивления.

Если нелинейный элемент является безынерционным, то он характеризуется первыми двумя из перечисленных ниже параметров.

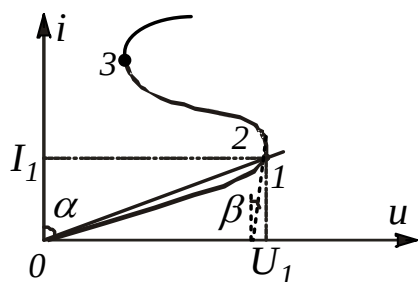


Рис. 3.10

Статическое сопротивление равно отношению напряжения на резистивном элементе к протекающему через него току. В частности, для точки 1 ВАХ на рис. 3.10

$$R_{cm} = \frac{U_1}{I_1} = m_R \operatorname{tg} \alpha.$$

Под **дифференциальным сопротивлением** понимается отношение

бесконечно малого приращения напряжения к соответствующему приращению тока:

$$R_{\partial} = \frac{du}{di} = m_R \operatorname{tg} \beta.$$

Следует отметить, что у неуправляемого нелинейного резистора $R_{cm} > 0$ всегда, а R_{∂} может принимать и отрицательные значения (участок 2-3 ВАХ на рис. 3.10).

В случае инерционного нелинейного резистора вводится понятие **динамического сопротивления**

$$R_{\partial_{ин}} = \frac{du}{di},$$

определяемого по динамической ВАХ. В зависимости от скорости изменения переменной, например тока, может меняться не только величина, но и знак $R_{\partial_{ин}}$.

Методы расчета нелинейных электрических цепей постоянного тока

Электрическое состояние нелинейных цепей описывается на основании законов Кирхгофа, которые имеют общий характер. При этом следует помнить, что для **нелинейных цепей принцип наложения неприменим**. В этой связи методы расчета, разработанные для линейных схем на основе законов Кирхгофа и принципа наложения, в общем случае не распространяются на нелинейные цепи.

Общих методов расчета нелинейных цепей не существует. Известные приемы и способы имеют различные возможности и области применения. В общем случае при анализе нелинейной цепи описывающая ее система нелинейных уравнений может быть решена следующими методами:

- графическими;
- аналитическими;
- графоаналитическими;
- итерационными.

Графические методы расчета

При использовании этих методов задача решается путем графических построений на плоскости. При этом характеристики всех ветвей цепи следует записать в функции одного общего аргумента. Благодаря этому система уравнений сводится к одному нелинейному уравнению с одним неизвестным. Формально при расчете различают цепи с последовательным, параллельным и смешанным соединениями.

а) Цепи с последовательным соединением резистивных элементов.

При последовательном соединении нелинейных резисторов в качестве общего аргумента принимается ток, протекающий через последовательно соединенные элементы. Расчет проводится в следующей

последовательности. По заданным ВАХ $U_i(I)$ отдельных резисторов в системе декартовых координат $U-I$ строится результирующая зависимость $U(I) = \sum U_i(I)$. Затем на оси напряжений откладывается точка, соответствующая в выбранном масштабе заданной величине напряжения на входе цепи, из которой восстанавливается перпендикуляр до пересечения с зависимостью $U(I)$. Из точки пересечения перпендикуляра с кривой $U(I)$ опускается ортогональ на ось токов – полученная точка соответствует искомому току в цепи, по найденному значению которого с использованием зависимостей $U_i(I)$ определяются напряжения U_i на отдельных резистивных элементах.

Применение указанной методики иллюстрируют графические построения на рис. 3.11,б, соответствующие цепи на рис. 3.11,а.

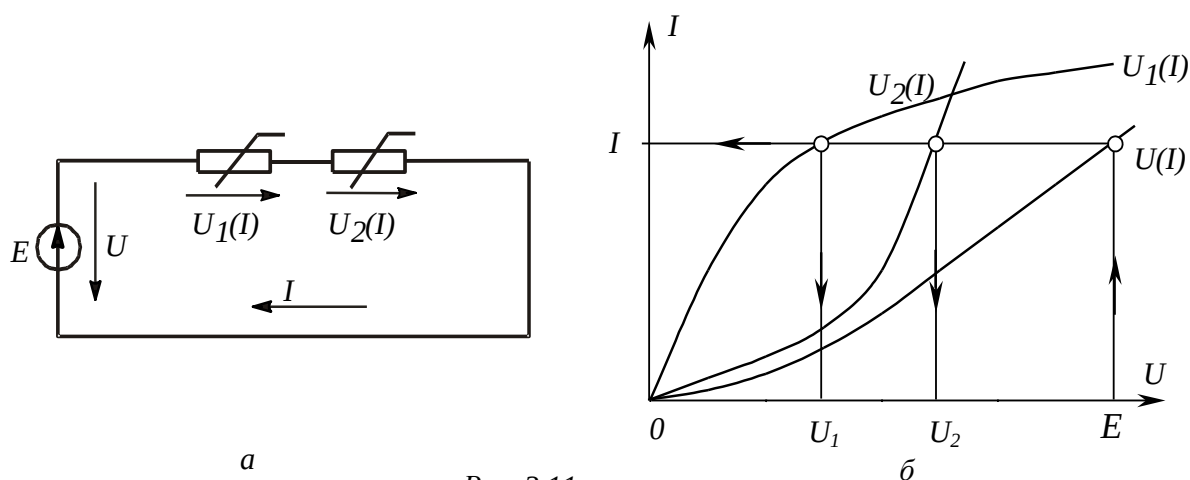


Рис. 3.11

Графическое решение для последовательной нелинейной цепи с двумя резистивными элементами может быть проведено и другим методом – **методом пересечений**. В этом случае один из нелинейных

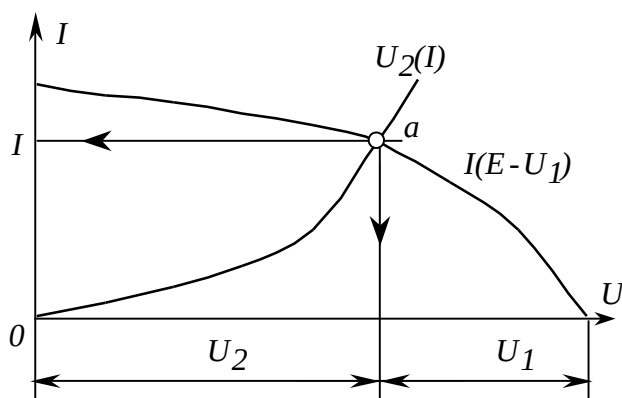


Рис. 3.12

резисторов, например с ВАХ $U_1(I)$ на рис. 3.11,а, считается внутренним сопротивлением источника с ЭДС E , а другой – нагрузкой. Тогда на основании соотношения $E - U_1(I) = U_2(I)$ точка a (см. рис. 3.12) пересечения кривых $I(E - U_1)$ и $U_2(I)$ определяет режим работы цепи. Кривая $I(E - U_1)$

строится путем вычитания абсцисс ВАХ $U_1(I)$ из ЭДС E для различных значений тока.

Использование данного метода наиболее рационально при последовательном соединении линейного и нелинейного резисторов. В этом случае линейный резистор принимается за внутреннее

сопротивление источника и линейная ВАХ последнего строится по двум точкам.

б) Цепи с параллельным соединением резистивных элементов.

При параллельном соединении нелинейных резисторов в качестве общего аргумента принимается напряжение, приложенное к параллельно соединенным элементам. Расчет проводится в следующей последовательности. По заданным ВАХ $I_i(U)$ отдельных резисторов в системе декартовых координат $U-I$ строится результирующая зависимость $I(U) = \sum I_i(U)$. Затем на оси токов откладывается точка, соответствующая в выбранном масштабе заданной величине тока источника на входе цепи (при наличии на входе цепи источника напряжения задача решается сразу путем восстановления перпендикуляра из точки, соответствующей заданному напряжению источника, до пересечения с ВАХ $I_i(U)$), из которой восстанавливается перпендикуляр до пересечения с зависимостью $I(U)$. Из точки пересечения перпендикуляра с кривой $I(U)$ опускается ортогональ на ось напряжений – полученная точка соответствует напряжению на нелинейных резисторах, по найденному значению которого с использованием зависимостей $I_i(U)$ определяются токи I_i в ветвях с отдельными резистивными элементами.

Использование данной методики иллюстрируют графические построения на рис. 3.13,б, соответствующие цепи на рис. 3.13,а.

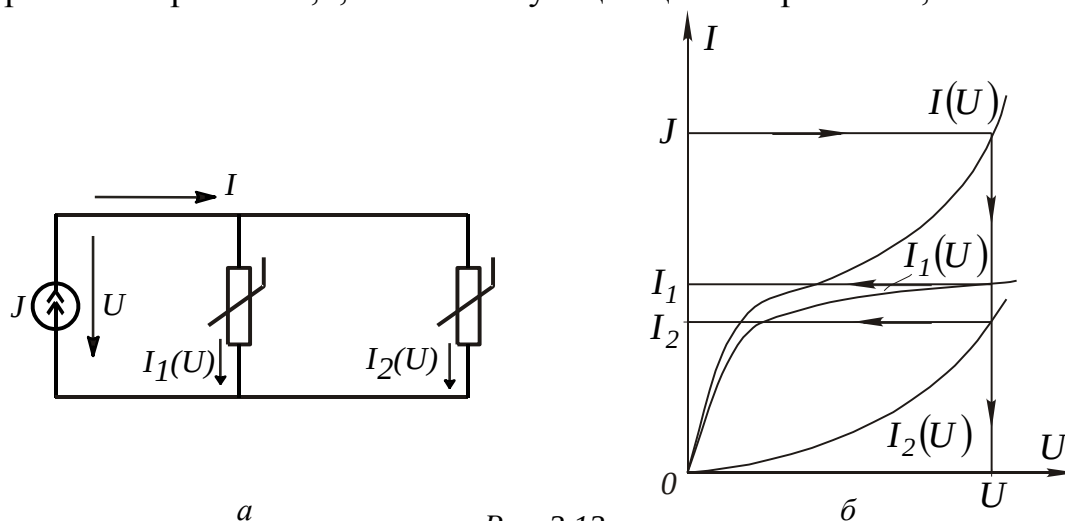


Рис. 3.13

в) Цепи с последовательно-параллельным (смешанным) соединением резистивных элементов.

Расчет таких цепей производится в следующей последовательности.

1. Исходная схема сводится к цепи с последовательным соединением резисторов, для чего строится результирующая ВАХ параллельно соединенных элементов, как это показано в пункте «б».

2. Проводится расчет полученной схемы с последовательным соединением резистивных элементов (см. пункт «а»), на основании которого затем определяются токи в исходных параллельных ветвях.

Метод двух узлов

Для цепей, содержащих два узла или сводящихся к таковым, можно применять метод двух узлов. При полностью графическом способе реализации метода он заключается в следующем.

1. Строятся графики зависимостей $I_i(U_{mn})$ токов во всех i -х ветвях в функции общей величины – напряжения U_{mn} между узлами m и n , для чего каждая из исходных кривых $I_i(U_i)$ смещается вдоль оси напряжений параллельно самой себе, чтобы ее начало находилось в точке, соответствующей ЭДС E_i в i -й ветви, а затем зеркально отражается относительно перпендикуляра, восстановленного в этой точке.

2. Определяется, в какой точке графически реализуется первый закон Кирхгофа $\sum I_i(U_{mn}) = 0$. Соответствующие данной точке токи являются решением задачи.

В качестве примера рассмотрим схему на рис. 3.14.

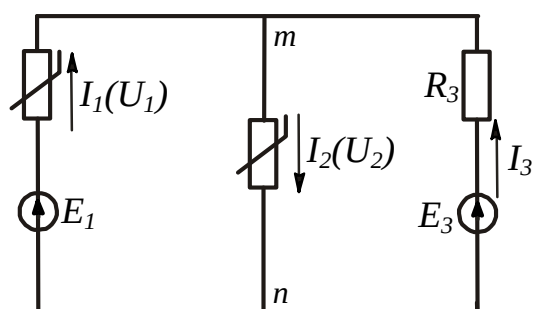


Рис. 3.14

Симметричные ВАХ нелинейных резисторов в схеме на рис. 3.14 заданы в табл. 3.4. Найти токи в ветвях схемы и напряжение U_{mn} , если $E_1 = 6,5 \text{ В}; E_3 = 5,4 \text{ В}; R_3 = 2,5 \text{ Ом}$.

Таблица 3.4. ВАХ НР

$U_{1(2)}, \text{В}$	0	0,5	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0
$I_1, \text{А}$	0	0,2	0,4	0,68	0,86	0,96	1,0	1,0	1,0
$I_2, \text{А}$	0	1,12	1,4	1,8	2,14	2,44	2,72	2,9	3,0

Алгоритм решения задачи

1. Выразим все токи в функции одного переменного – напряжения U_{mn} , для чего в соответствии с законом Ома для участка цепи с источником ЭДС запишем U_1, U_2 и U_3 в функции E_i и U_{mn} :

$$U_1 = E_1 - U_{mn}; \quad (3.1)$$

$$U_2 = U_{mn}; \quad (3.2)$$

$$U_3 = E_3 - U_{mn}. \quad (3.3)$$

2. Задаваясь различными значениями U_{mn} , на основании выражений (3.1)...(3.3) и данных табл. 3.4 строим (см. рис. 3.15) графики зависимостей $I_1(U_{mn})$, $I_2(U_{mn})$ и $I_3(U_{mn})$.

Если провести анализ построенных кривых, например $I_1(U_{mn})$, то можно отметить следующее. Для точки d $I_1 = 0$ и $U_1 = 0$; следовательно, $U_{mn} = E_1$, т.е. начало кривой $I_1(U_{mn})$ сдвинуто в точку d ($U_{mn} = E_1$). При этом кривая $I_1(U_{mn})$ является зеркальным отображением кривой $I_1(U_1 - E_1)$, получаемой путем переноса кривой $I_1(U_1)$ параллельно самой себе вдоль оси абсцисс на отрезок od . На основании изложенного на практике кривая зависимости $I_1(U_{mn})$ строится в соответствии с приведенной выше методикой:

- смещаем кривую $I_1(U_1)$ вдоль оси абсцисс параллельно самой себе так, чтобы ее начало находилось в точке d ($U_{mn} = E_1$) (см. пунктирную кривую $I_1(U_1 - E_1)$ на рис. 3.15);
- проводим через точку d ортогональ и зеркально отражаем относительно ее пунктирную кривую $I_1(U_1 - E_1)$ – получаем кривую $I_1(U_{mn})$.

Аналогично строится зависимость $I_3(U_{mn})$. Поскольку средняя ветвь не содержит источника ЭДС, кривая $I_2(U_{mn})$ тождественна кривой $I_2(U_2)$.

3. Строим кривую $I_{\Sigma}(U_{mn}) = I_1(U_{mn}) + I_3(U_{mn})$.

4. Поскольку в соответствии с первым законом Кирхгофа $I_1(U_{mn}) + I_3(U_{mn}) = I_2(U_{mn})$, точка a пересечения кривых $I_{\Sigma}(U_{mn})$ и $I_2(U_{mn})$ определяет рабочий режим цепи. Проекция точки a на ось

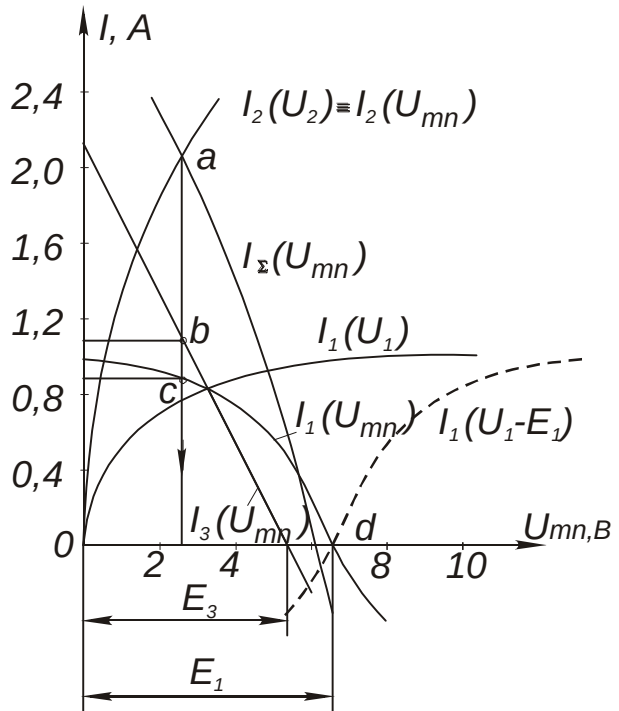


Рис. 3.15

ординат соответствует току во второй ветви: $I_2 = 2,04 \text{ A}$. Проекция точки b и c пересечения перпендикуляра, опущенного из точки a , с графиками зависимостей $I_3(U_{mn})$ и $I_1(U_{mn})$ на ось ординат определяют соответственно токи $I_3 = 1,1 \text{ A}$ и $I_1 = 0,94 \text{ A}$.

5. Искомому напряжению соответствует проекция точки a на ось абсцисс, т.е. $U_{mn} = 2,65 \text{ B}$.

Метод двух узлов может быть реализован и в другом варианте, отличающемся от изложенного выше меньшим числом графических построений.

В качестве примера рассмотрим цепь на рис. 3.14.

Задаемся током, протекающим через один из резисторов, например во второй ветви I_2 , и рассчитываем U_{mn} , а затем по U_{mn} с использованием (3.1) и (3.3) находим U_1 и U_3 и по зависимостям $I_1(U_1)$ и $I_3(U_3)$ – соответствующие им токи I_1 и I_3 и т.д. Результаты вычислений сводим в табл. 3.5, в последней колонке которой определяем сумму токов:

$$\sum I_i = I_1 - I_2 + I_3.$$

Таблица 3.5. Таблица результатов расчета методом двух узлов

I_2	$U_2 = U_{mn}$	$U_1 = E_1 - U_{mn}$	I_1	$U_3 = E_3 - U_{mn}$	I_3	$\sum I_i$

Алгебраическая сумма токов в соответствии с первым законом Кирхгофа должна равняться нулю, поэтому получающаяся в последней колонке табл. 3.5 величина $\sum I_i$ указывает, каким значением I_2 следует задаваться на следующем шаге.

В осях $\sum I_i - U_{mn}$ строим кривую зависимости $\sum I_i(U_{mn})$ и по точке ее пересечения с осью напряжений определяем напряжение U_{mn} между точками m и n . Для найденного значения U_{mn} по (3.1)...(3.3) рассчитываем напряжения на резисторах, после чего по заданным зависимостям $I_i(U_i)$ определяем токи в ветвях схемы.

Расчет нелинейных цепей методом эквивалентного генератора

Если в сложной электрической цепи имеется одна ветвь с нелинейным резистором, то определение тока в ней можно проводить на основе теоремы об активном двухполюснике (методом эквивалентного генератора). Идея решения заключается в следующем. Ветвь, содержащая нелинейный резистор, выделяется из исходной цепи, а вся остальная, уже линейная, схема представляется в виде активного двухполюсника (АД). Согласно теореме об АД схему линейного АД по отношению к зажимам

1–2 выделенной ветви (см. рис. 3.16,а) можно представить эквивалентным генератором (см. рис. 3.16,б) с ЭДС, равной напряжению U_{xx1-2} на зажимах 1–2 при разомкнутой ветви с нелинейным резистором, и внутренним сопротивлением, равным входному сопротивлению линейного двухполюсника. Последняя схема рассчитывается, например, графическим методом как цепь с последовательным соединением элементов.

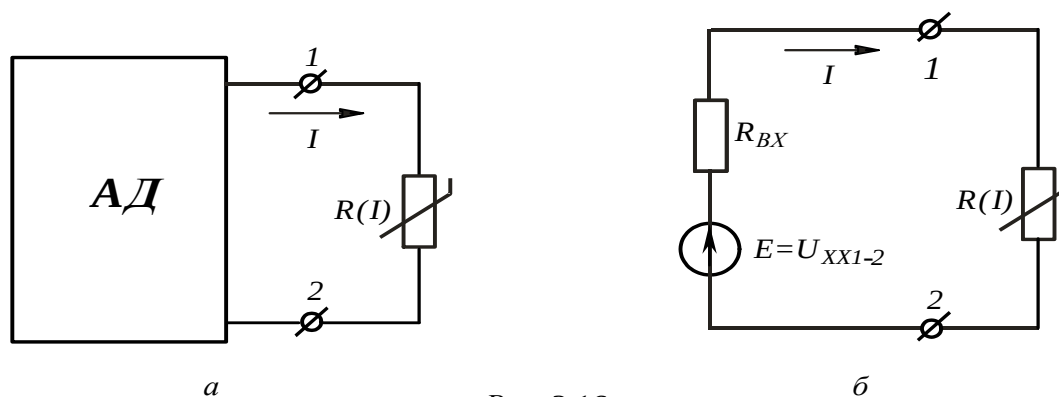


Рис. 3.16

Если необходимо также найти токи в линейной части исходной цепи, то после расчета нелинейной схемы на рис. 3.16,б в соответствии с теоремой о компенсации нелинейный резистор заменяется источником ЭДС или тока, после чего проводится анализ полученной линейной цепи любым известным методом.

В качестве примера рассмотрим схему на рис. 3.17.

Мост на рис. 3.17 состоит из линейных резисторов: $R_1 = R_4 = 2 \text{ êÎ } \text{î}$, $R_2 = R_3 = 1 \text{ êÎ } \text{î}$.

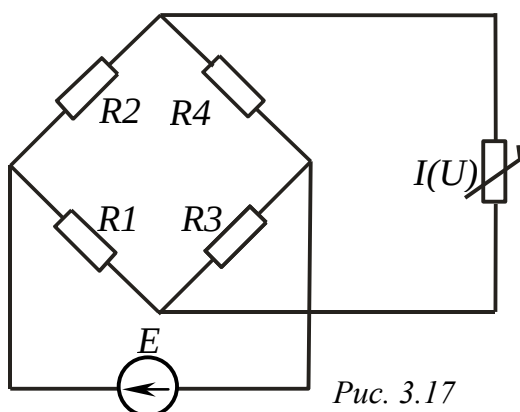


Рис. 3.17

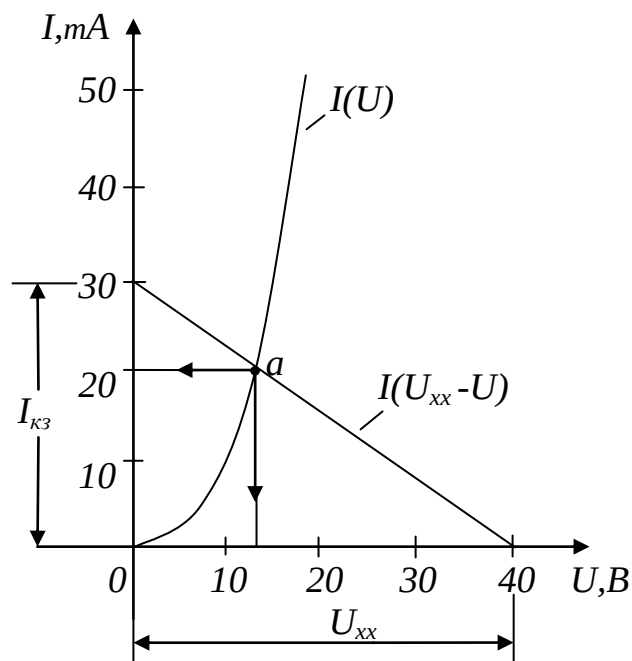


Рис. 3.18

К выходу моста подключен нелинейный резистор (НР), ВАХ которого представлена на рис. 3.18. Определить напряжение и ток на выходе моста.

Алгоритм решения задачи

1. В соответствии с изложенной выше методикой разомкнем ветвь с НР и определим параметры U_{xx} и $R_{\hat{a}\hat{o}}$ АД, эквивалентного линейной части схемы:

$$U_{xx} = E \left(\frac{R_4}{R_3 + R_4} - \frac{R_3}{R_1 + R_3} \right) = 40 \text{ В};$$

$$R_{\hat{a}\hat{o}} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4} = \frac{4}{3} \hat{\Gamma} \text{ } \hat{\Omega}.$$

2. Решая задачу методом пересечений (кривая $I(U_{xx} - U)$ на рис. 3.18 – внешняя характеристика АД; $I_{\hat{e}\hat{c}} = U_{xx} / R_{\hat{a}\hat{o}} = 30 \text{ } \hat{\Omega}$), получаем напряжение и ток на выходе моста: $U_3 = 13 \text{ В}$ и $I = 20 \text{ } \hat{\Omega}$.

Аналитические методы расчета

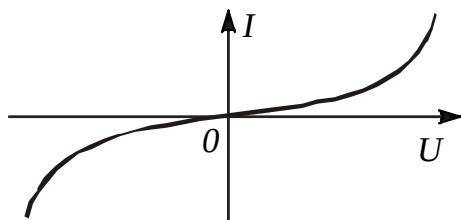
Исследования общих свойств нелинейных цепей удобно осуществлять на основе математического анализа, базирующегося на аналитическом выражении характеристик нелинейных элементов, т.е. их аппроксимации. На выбор аналитического метода влияют условия поставленной задачи, а также характер возможного перемещения рабочей точки по характеристике нелинейного элемента: по всей характеристике или в ее относительно небольшой области.

К аналитическим методам относятся:

- метод аналитической аппроксимации;
- метод кусочно-линейной аппроксимации;
- метод линеаризации.

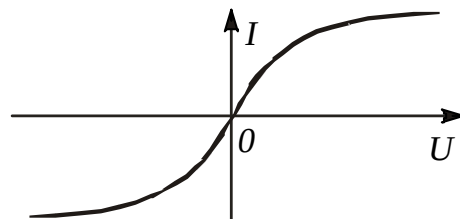
Метод аналитической аппроксимации основан на замене характеристики (или ее участка) нелинейного элемента общим аналитическим выражением. Применяются следующие виды аналитической аппроксимации:

- степенным многочленом (см. рис. 3.19,а);
- трансцендентными (экспоненциальными, гиперболическими и др.) функциями (см. рис. 3.19,б).



$$I = aU + bU^3 + cU^5 + \dots$$

а



$$I = atanhbU$$

б

Рис. 3.19

Выбор коэффициентов $(a, b, c, \dots)$ осуществляется исходя из наибольшего соответствия аналитического выражения рабочему участку нелинейной характеристики. При этом выбираются наиболее характерные точки, через которые должна пройти аналитическая кривая. Число точек равно числу коэффициентов в аналитическом выражении, что позволяет однозначно определить последнее.

Необходимо помнить, что при получении нескольких корней нелинейного уравнения они должны быть проверены на удовлетворение задаче. Пусть, например, в цепи, состоящей из последовательно соединенных линейного R и нелинейного резисторов, ВАХ последнего может быть аппроксимирована выражением $U(I) = aI + bI^2$. Определить ток в цепи, если источник ЭДС E обеспечивает режим работы цепи в первом квадранте.

В соответствии со вторым законом Кирхгофа для данной цепи имеет место уравнение

$$E = U_R + U(I) = RI + aI + bI^2$$

или

$$I^2 + \frac{R+a}{b}I - \frac{E}{b} = 0.$$

Корни уравнения

$$I_{1,2} = -\frac{R+a}{2b} \pm \sqrt{\frac{(R+a)^2}{4b^2} + \frac{E}{b}}.$$

Решением задачи является $I = I_1$, поскольку второе решение $I_2 < 0$ не удовлетворяет условиям, исходя из физических соображений.

Метод кусочно-линейной аппроксимации основан на представлении характеристики нелинейного элемента отрезками прямых линий (см. рис. 3.20), в результате чего нелинейная цепь может быть описана линейными уравнениями с постоянными (в пределах каждого отрезка) коэффициентами.

При наличии в цепи двух и более нелинейных резисторов реализация метода затруднена, так как в общем случае изначально неизвестно, на каких участках ломаных кривых находятся рабочие точки.

Кусочно-линейная аппроксимация может быть реализована **методом секционных кусочно-линейных функций**, позволяющим описать ломаную кривую общим аналитическим выражением. Например, для кривой, представленной на рис. 3.21 и определяемой коэффициентами K_0, K_1 и K_2 , характеризующими наклон ее отдельных прямолинейных участков, и параметрами $U_1, U_2, f(U_1-), f(U_1+), f(U_2-), f(U_2+)$, характеризующими координаты точек, где значения функции изменяются скачками, данное выражение будет иметь вид

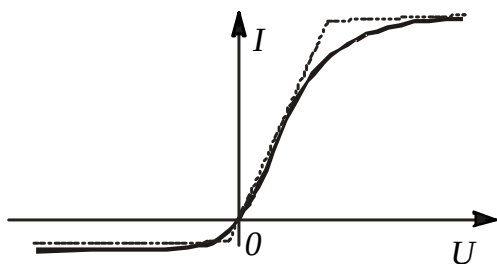


Рис. 3.20

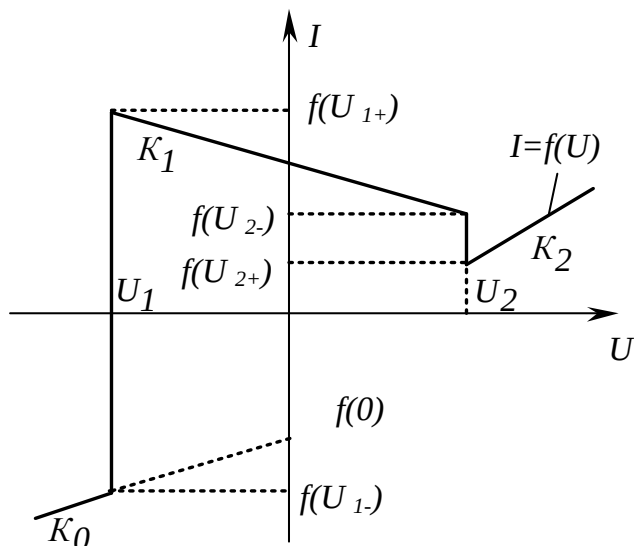


Рис. 3.21

$$\begin{aligned}
 I(U) = & f(0) + K_0 U + \frac{f(U_{1+}) - f(U_{1-})}{2} \times [1 + \text{sign}(U - U_1)] + \frac{K_1 - K_0}{2} \times \\
 & \times [|U - U_1| + (U - U_1)] + \frac{f(U_{2+}) - f(U_{2-})}{2} [1 + \text{sign}(U - U_2)] + \\
 & + \frac{K_2 - K_1}{2} [|U - U_2| + (U - U_2)].
 \end{aligned}$$

Здесь два первых слагаемых в правой части определяют первый наклонный участок аппроксимируемой кривой; три первых слагаемых – первый наклонный участок и участок первого скачка; четыре первых слагаемых – первый и второй наклонные участки с учетом участка первого скачка и т.д.

В общем случае аппроксимирующее выражение по методу секционных кусочно-линейных функций имеет вид

$$\begin{aligned}
 I(U) = & f(0) + K_0 U + \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{K_j - K_{j-1}}{2} [|U - U_j| + (U - U_j)] + \right. \\
 & \left. + \frac{f(U_{j+}) - f(U_{j-})}{2} [1 + \text{sign}(U - U_j)] \right\}.
 \end{aligned}$$

Рассмотрим пример применения данного метода.

Пусть в цепи на рис 3.16,б

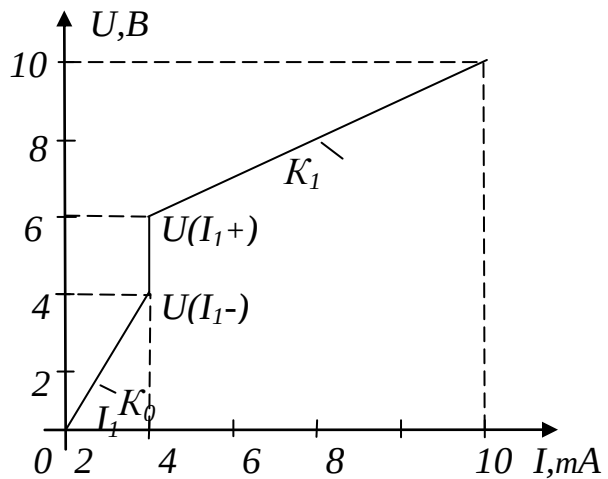
$$E = 14 \hat{A}, R_{\hat{A}\hat{O}} = 1000 \hat{I} \text{ } \hat{\Omega}.$$

ВАХ НР, аппроксимированная ломаной, приведена на рис. 3.22. Определить ток цепи методом секционных кусочно-линейных функций.

Алгоритм решения задачи

1. Запишем уравнение ВАХ НР

$$U(I) = U(0) + K_0 I + \frac{K_1 - K_0}{2} \times \\ \times [|I - I_1| + (I - I_1)] + \\ + \frac{U(I_1+) - U(I_1-)}{2} \times \\ \times [1 + \text{sign}(I - I_1)]. \quad (3.4)$$



Здесь $U(0) = 0$;

Рис. 3.22

$$K_0 = 4/2 \times 10^{-3} = 2000 \text{ В/А};$$

$$U(I_1+) = 6 \text{ В.}$$

2. Подставляя в (3.4) численные значения определенных параметров, получаем

$$U(I) = 0 + 2000I + \frac{500 - 2000}{2} [|I - 0,002| + (I - 0,002)] + \\ + \frac{6 - 4}{2} [1 + \text{sign}(I - 0,002)] = 1250I + 1,5 - 750|I - 0,002| + \\ + [1 + \text{sign}(I - 0,002)]. \quad (3.5)$$

3. По второму закону Кирхгофа для цепи на рис. 3.16,б можно записать

$$E = IR_{\text{вО}} + U(I)$$

или с учетом (3.5)

$$2250I - 750|I - 0,002| + [1 + \text{sign}(I - 0,002)] = 12,5. \quad (3.6)$$

4. Для первого наклонного участка кривой имеем $I = 0,002 \text{ А}$, на основании чего $|I - 0,002| = 0,002 - I$. Таким образом, для данного участка уравнение (3.6) может быть записано как

$$2250I - 750 \times 0,002 + 750I = 12,5,$$

откуда $I = 0,0047 \text{ А}$.

Соответственно для второго наклонного участка $I > 0,002 \text{ А}$. Тогда $|I - 0,002| = I - 0,002$, и соотношение (3.6) трансформируется в уравнение

$$2250I - 750I + 1,5 + 2 = 12,5,$$

корнем которого является $I = 0,006 \text{ A}$.

Кривой на рис. 3.22 удовлетворяет второе значение тока, которое и является решением задачи, т.е. $I = 0,006 \text{ A}$.

Метод линеаризации применим для анализа нелинейных цепей при малых отклонениях рабочей точки P (см. рис. 3.23) от исходного состояния.

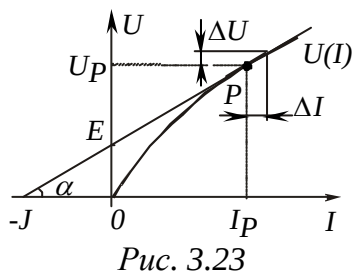


Рис. 3.23

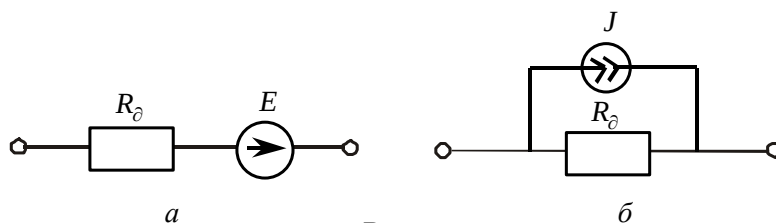


Рис. 3.24

В окрестности рабочей точки P (см. рис. 3.23)

$$U \cong U(I_p) + \Delta U.$$

Здесь $\Delta U = R_\delta \Delta I$ (**закон Ома для малых приращений**),

где $R_\delta = \left. \frac{dU}{dI} \right|_P = m_R \cdot \operatorname{tg} \alpha$ — дифференциальное сопротивление.

Идея метода заключается в замене нелинейного резистора линейным с сопротивлением, равным дифференциальному в заданной (или предполагаемой) рабочей точке, и либо последовательно включенным с ним источником ЭДС, либо параллельно включенным источником тока. Таким образом, линеаризованной ВАХ (см. прямую на рис. 3.23) соответствует последовательная (рис. 3.24,а) или параллельная (рис. 3.24,б) схема замещения нелинейного резистора.

Если исходный режим определен и требуется рассчитать лишь приращения токов и (или) напряжений, обусловленные изменением напряжения или тока источника, целесообразно использовать **эквивалентные схемы для приращений**, получаемые на основании **законов Кирхгофа для малых приращений**:

-первый закон Кирхгофа: $\sum \Delta I = 0$;

-второй закон Кирхгофа: $\sum \Delta I R_\delta = \sum \Delta E$.

При составлении схемы для приращений необходимо:

- 1) все ЭДС и токи источников заменить их приращениями;
- 2) нелинейные резисторы заменить линейными с сопротивлениями, равными дифференциальным в рабочих точках.

Следует помнить, что полная величина какого-либо тока или напряжения в цепи равна алгебраической сумме исходного значения переменной и ее приращения, рассчитанного методом линеаризации.

Если исходный режим работы нелинейного резистора неизвестен, то следует задаться рабочей точкой на его ВАХ и, осуществив соответствующую линеаризацию, произвести расчет, по окончании которого необходимо проверить, соответствуют ли его результаты выбранной точке. В случае их несовпадения линеаризованный участок уточняется, расчет повторяется, и так до получения требуемой сходимости.

НЕЛИНЕЙНЫЕ МАГНИТНЫЕ ЦЕПИ ПРИ ПОСТОЯННЫХ ПОТОКАХ

Основные понятия и законы магнитных цепей

При решении электротехнических задач все вещества в магнитном отношении делятся на две группы:

- **ферромагнитные** (относительная магнитная проницаемость $\mu \gg 1$);
- **неферромагнитные** (относительная магнитная проницаемость $\mu \approx 1$).

Для концентрации магнитного поля и придания ему желаемой конфигурации отдельные части электротехнических устройств выполняются из ферромагнитных материалов. Эти части называют **магнитопроводами** или **сердечниками**. Магнитный поток создается токами, протекающими по обмоткам электротехнических устройств, реже – постоянными магнитами. Совокупность устройств, содержащих ферромагнитные тела и образующих замкнутую цепь, вдоль которой замыкаются линии магнитной индукции, называют **магнитной цепью**.

Магнитное поле характеризуется тремя векторными величинами, которые приведены в табл. 3.6.

Основные скалярные величины, используемые при расчете магнитных цепей, приведены в табл. 3.7.

Таблица 3.6. Векторные величины, характеризующие магнитное поле

Наименование	Обозначение	Единица измерения	Определение
Вектор магнитной индукции	$\vec{B}$	Тл (тесла)	Векторная величина, характеризующая силовое действие магнитного поля на ток по закону Ампера
Вектор намагниченности	$\vec{J}$	А/м	Магнитный момент единицы объема вещества
Вектор напряженности магнитного поля	$\vec{H}$	А/м	$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{J} = \frac{1}{\mu_0 \mu} \vec{B},$

			где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$ – магнитная постоянная
--	--	--	---

Таблица 3.7. Основные скалярные величины, характеризующие магнитную цепь

Наименование	Обозначение	Единица измерения	Определение
Магнитный поток	$\hat{\Phi}$	Вб	Поток вектора магнитной индукции через поперечное сечение S магнитопровода $\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}$
Магнитодвижущая (намагничивающая) сила МДС (НС)	F	А	$F = Iw$, где I –ток в обмотке, w –число витков обмотки
Магнитное напряжение	U_M	А	Линейный интеграл от напряженности магнитного поля $U_M = \int_a^b \vec{H} d\vec{l}$, где a и b –граничные точки участка магнитной цепи, для которого определяется U_M

Характеристики ферромагнитных материалов

Свойства ферромагнитных материалов характеризуются зависимостью $B(H)$ магнитной индукции от напряженности магнитного поля. При этом различают **кривые намагничивания**, представляющие собой однозначные зависимости $B(H)$, и **гистерезисные петли** – неоднозначные зависимости $B(H)$ (см. рис. 3.25).

Основные понятия, характеризующие зависимости $B(H)$, приведены в табл. 3.8.

Таблица 3.8. Основные понятия, характеризующие зависимости $B(H)$

Понятие	Определение
Магнитный гистерезис	Явление отставания изменения магнитной индукции B от изменения напряженности магнитного поля H
Статическая петля гистерезиса	Зависимость $B(H)$, получаемая путем ряда повторных достаточно медленных изменений магнитной напряженности в пределах выбранного значения $\pm H_m$ (см. кривые 1 на рис. 3.25). Площадь статической петли гистерезиса характеризует собой потери на магнитный гистерезис за один период изменения магнитной напряженности
Начальная кривая намагничивания	Кривая намагничивания предварительно размагниченного ферромагнетика ($B=0; H=0$) при плавном изменении магнитной напряженности H . Представляет собой однозначную зависимость $B(H)$ и обычно близка к основной кривой намагничивания
Основная кривая намагничивания	Геометрическое место вершин петель магнитного гистерезиса (см. кривую 2 на рис. 3.25). Представляет собой однозначную зависимость $B(H)$
Предельная петля гистерезиса (предельный цикл)	Симметричная петля гистерезиса при максимально возможном насыщении
Коэрцитивная (задерживающая) сила	Напряженность магнитного поля H_c , необходимая для доведения магнитной индукции в предварительно намагниченном ферромагнетике до нуля. В справочной литературе обычно дается для предельной петли гистерезиса
Остаточная индукция	Значение индукции магнитного поля B_r при равной нулю напряженности магнитного поля. В справочной литературе обычно дается для предельного цикла

Магнитомягкие и магнитотвердые материалы

Перемагничивание ферромагнитного материала связано с расходом энергии на этот процесс. Как уже указывалось, площадь петли гистерезиса характеризует энергию, выделяемую в единице объема ферромагнетика за один цикл перемагничивания. В зависимости от величины этих потерь и соответственно формы петли гистерезиса ферромагнитные материалы подразделяются на магнитомягкие и магни-

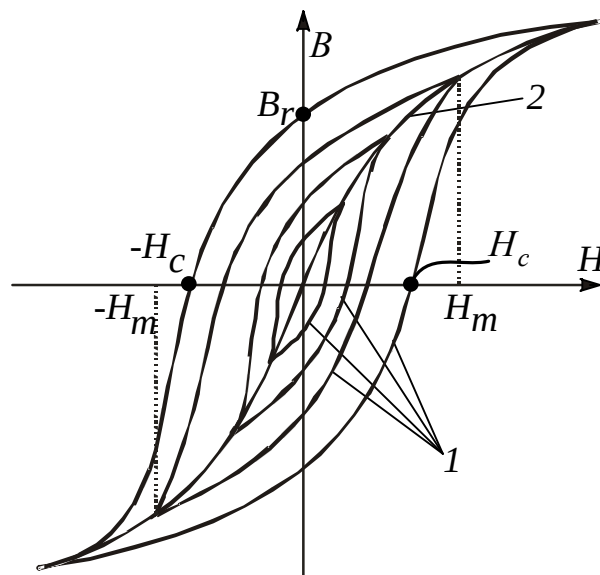


Рис. 3.25

тот твердые. Первые характеризуются относительно узкой петлей гистерезиса и круто поднимающейся основной кривой намагничивания; вторые обладают большой площадью гистерезисной петли и полого поднимающейся основной кривой намагничивания.

Магнитомягкие материалы (электротехнические стали, железоникелевые сплавы, ферриты) определяют малые потери в сердечнике и применяются в устройствах, предназначенных для работы при переменных магнитных потоках (трансформаторы, электродвигатели и др.). Магнитотвердые материалы (углеродистые стали, вольфрамовые сплавы и др.) используются для изготовления постоянных магнитов.

Статическая и дифференциальная магнитные проницаемости

Статическая магнитная проницаемость (в справочниках – начальная и максимальная)

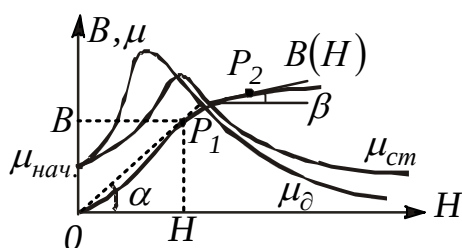


Рис. 3.26

$$\mu_{ст} = \frac{1}{\mu_0} \frac{B}{H} \Big|_{P_1} = m_\mu \operatorname{tg} \alpha \quad (3.7)$$

определяется по основной кривой намагничивания и в силу ее нелинейности не постоянна по величине (см. рис. 3.26).

Величина $\mu_{нач}$ определяется тангенсом угла наклона касательной в начале кривой $B(H)$.

Кроме статической вводится понятие **дифференциальной магнитной проницаемости**, устанавливающей связь между бесконечно малыми приращениями индукции и напряженности:

$$\mu_{\partial} = \frac{1}{\mu_0} \frac{dB}{dH} \Big|_{P_2} = m_{\mu} \operatorname{tg} \beta. \quad (3.8)$$

Кривые $\mu_{cm}(H)$ и $\mu_{\partial}(H)$ имеют две общие точки: начальную и точку, соответствующую максимуму μ_{cm} (см. рис. 3.26).

При учете петли гистерезиса статическая магнитная проницаемость, определяемая согласно (3.7), теряет смысл. При этом значения μ_{∂} определяют по восходящей ветви петли при $dH > 0$ и по нисходящей – при $dH < 0$.

При переменном магнитном потоке вводится также понятие **динамической магнитной проницаемости**, определяемой соотношением, аналогичным (3.8), по динамической характеристике.

Основные законы магнитных цепей

В основе расчета магнитных цепей лежат два закона (см. табл. 3.9).

Таблица 3.9. Основные законы магнитной цепи

Наименование закона	Аналитическое выражение закона	Формулировка закона
Закон (принцип) непрерывности магнитного потока	$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$	Поток вектора магнитной индукции через замкнутую поверхность равен нулю
Закон полного тока	$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \sum I$	Циркуляция вектора напряженности вдоль произвольного контура равна алгебраической сумме токов, охватываемых этим контуром

При анализе магнитных цепей, и в первую очередь при их синтезе, обычно используют следующие допущения:

- магнитная напряженность, соответственно магнитная индукция, во всех точках поперечного сечения магнитопровода одинакова ($B = \Phi/S$);
- потоки рассеяния отсутствуют (магнитный поток через любое сечение неразветвленной части магнитопровода одинаков);
- сечение воздушного зазора равно сечению прилегающих участков магнитопровода.

Это позволяет использовать при расчетах законы Кирхгофа и Ома для магнитных цепей (см. табл. 3.10), вытекающие из законов, сформулированных в табл. 3.9.

Таблица 3.10. Законы Кирхгофа и Ома для магнитных цепей

Наименование закона	Аналитическое выражение закона	Формулировка закона
Первый закон Кирхгофа	$\sum \Phi = 0$	Алгебраическая сумма магнитных потоков в узле магнитопровода равна нулю
Второй закон Кирхгофа	$\sum F = \sum U_M = \sum Hl$	Алгебраическая сумма падений магнитного напряжения вдоль контура равна алгебраической сумме МДС, действующих в контуре
Закон Ома	$U_M = \Phi R_M,$ где $R_M = l / \mu_0 \mu S$	Падение магнитного напряжения на участке магнитопровода длиной l равно произведению магнитного потока Φ и магнитного сопротивления R_M участка

Сформулированные законы и понятия магнитных цепей позволяют провести формальную аналогию между основными величинами и законами, соответствующими электрическим и магнитным цепям, которую иллюстрирует табл. 3.11.

Таблица 3.11. Аналогия величин и законов для электрических и магнитных цепей

Электрическая цепь	Магнитная цепь
Ток I, A	Поток $\Phi, Bб$
ЭДС E, B	МДС (НС) F, A
Электрическое сопротивление $R, Ом$	Магнитное сопротивление $R_M, Гн^{-1}$
Электрическое напряжение U, B	Магнитное напряжение U_M, A
Первый закон Кирхгофа: $\sum I = 0$	Первый закон Кирхгофа: $\sum \Phi = 0$
Второй закон Кирхгофа: $\sum E = \sum U$	Второй закон Кирхгофа: $\sum F = \sum U_M$
Закон Ома: $U = IR$	Закон Ома: $U_M = \Phi R_M$

Общая характеристика задач и методов расчета магнитных цепей

Указанная ранее формальная аналогия между электрическими и магнитными цепями позволяет распространить все методы и технику расчета нелинейных резистивных цепей постоянного тока на нелинейные магнитные цепи. При этом для наглядности можно составить эквивалентную электрическую схему замещения исходной магнитной цепи, с использованием которой выполняется расчет.

Нелинейность магнитных цепей определяется нелинейным характером зависимости $\Phi(U_M)$, являющейся аналогом ВАХ $I(U)$ и определяемой характеристикой ферромагнитного материала $B(H)$. При расчете магнитных цепей при постоянных потоках обычно используют основную кривую намагничивания. Петлеобразный характер зависимости $B(H)$ учитывается при расчете постоянных магнитов и электротехнических устройств на их основе.

При расчете магнитных цепей на практике встречаются две типичные задачи:

- задача определения величины намагничивающей силы (НС), необходимой для создания заданного магнитного потока (заданной магнитной индукции) на каком - либо участке магнитопровода (**задача синтеза** или **«прямая» задача**);
- задача нахождения потоков (магнитных индукций) на отдельных участках цепи по заданным значениям НС (**задача анализа** или **«обратная» задача**).

Следует отметить, что задачи второго типа являются обычно более сложными и трудоемкими в решении.

В общем случае в зависимости от типа решаемой задачи («прямой» или «обратной») решение может быть осуществлено следующими методами:

- регулярными;
- графическими;
- итерационными.

При этом при использовании каждого из этих методов первоначально необходимо указать на схеме направления НС, если известны направления токов в обмотках, или задаться их положительными направлениями, если их нужно определить. Затем задаются положительными направлениями магнитных потоков, после чего можно переходить к составлению эквивалентной схемы замещения и расчетам.

Магнитные цепи по своей конфигурации могут быть подразделены на **неразветвленные** и **разветвленные**. В неразветвленной магнитной цепи на всех ее участках имеет место один и тот же поток, т.е. различные участки цепи соединены между собой последовательно. Разветвленные магнитные цепи содержат два и более контура.

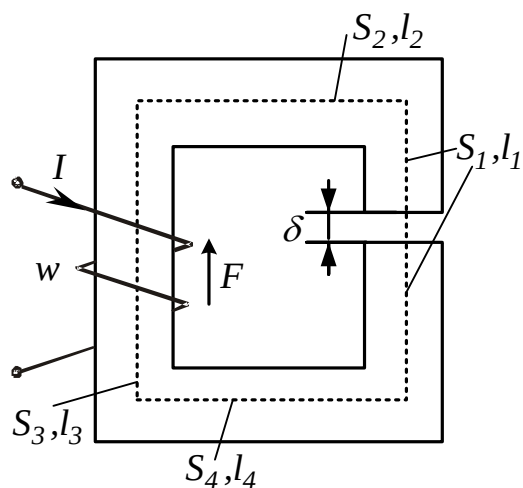
Регулярные методы расчета

Данными методами решаются задачи первого типа – «прямые» задачи. При этом в качестве исходных данных для расчета заданы конфигурация и основные геометрические размеры магнитной цепи, кривая (кривые) намагничивания ферромагнитного материала и магнитный поток или магнитная индукция в каком-либо сечении магнитопровода. Требуется найти НС, токи обмоток или, при известных значениях последних, число витков.

1. «Прямая» задача для неразветвленной магнитной цепи

Решение задач подобного типа осуществляется в следующей последовательности

1. Намечается средняя линия (см. пунктирную линию на рис.3.27), которая затем делится на участки с одинаковым сечением магнитопровода.
2. Исходя из постоянства магнитного потока вдоль всей цепи определяются значения индукции для каждого i -го участка:



Puc. 3.27

$$B_i = \frac{\Phi}{S_i}.$$

3. По кривой намагничивания для каждого значения B_i находятся напряженности H_i на ферромагнитных участках; напряженность поля в воздушном зазоре определяется согласно формуле

$$H_{\delta} = \frac{B_{\delta}}{\mu_0} = 0,796 \cdot 10^6 \text{ B}\delta.$$

4. По второму закону Кирхгофа для магнитной цепи определяется искомая НС путем суммирования

падений магнитного напряжения вдоль контура:

$$F = Iw = \sum H_i l_i + H_\delta \delta,$$

где δ — длина воздушного зазора.

2. «Прямая» задача для разветвленной магнитной цепи

Расчет разветвленных магнитных цепей основан на совместном применении первого и второго законов Кирхгофа для магнитных цепей. Последовательность решения задач данного типа в целом соответствует рассмотренному выше алгоритму решения «прямой» задачи для неразветвленной цепи. При этом для определения магнитных потоков на участках магнитопровода, для которых магнитная напряженность известна или может быть вычислена на основании второго закона Кирхгофа, следует использовать алгоритм

$$H_i \rightarrow \text{по } B(H) \quad B_i \rightarrow \Phi_i = B_i S_i.$$

В остальных случаях неизвестные магнитные потоки определяются на основании первого закона Кирхгофа для магнитных цепей.

В качестве примера анализа разветвленной магнитной цепи при заданных геометрии магнитной цепи на рис. 3.28 и характеристике $B(H)$ ферромагнитного сердечника определим НС $F = Iw$, необходимую для создания в воздушном зазоре индукции B_δ .

Алгоритм решения задачи

1. Задаем положительные направления магнитных потоков в стержнях магнитопровода (см. рис. 3.28).

2. Определяем напряженность в воздушном зазоре $H_\delta = \frac{B_\delta}{\mu_0}$ и по зависимости $B(H)$ для $B_3 = B_\delta$ – значение H_3 .

3. По второму закону Кирхгофа для правого контура записываем:

$$H_3 l_3 + H_\delta \delta - H_2 l_2 = 0,$$

откуда находим H_2 и по зависимости $B(H) - B_2$.

4. В соответствии с первым законом Кирхгофа

$$\Phi_1 = B_2 S_2 + B_3 S_3.$$

Тогда $B_1 = \Phi_1 / S_1$, и по зависимости $B(H)$ определяем H_1 .

5. В соответствии со вторым законом Кирхгофа для искомой НС имеет место уравнение

$$F_1 = H_1 \ell_1 + H_2 \ell_2.$$

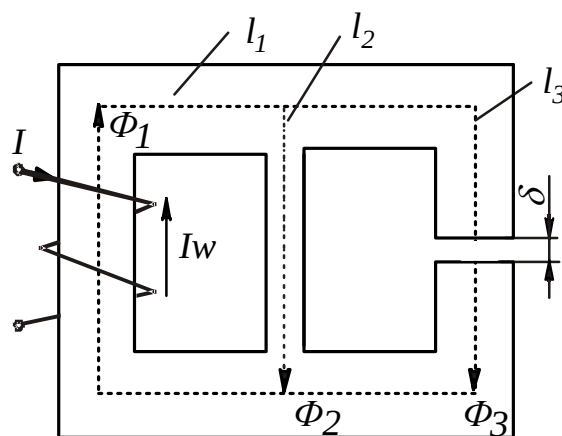


Рис. 3.28

Графические методы расчета

Графическими методами решаются задачи второго типа – «обратные» задачи. При этом в качестве исходных данных для расчета заданы конфигурация и геометрические размеры магнитной цепи, кривая (кривые) намагничивания ферромагнитного материала, а также НС обмоток. Требуется найти значения потоков (индукций) на отдельных участках магнитопровода.

Данные методы основаны на графическом представлении вебер-амперных характеристик $\Phi(U_M)$ линейных и нелинейных участков магнитной цепи с последующим решением алгебраических уравнений, записанных по законам Кирхгофа, с помощью соответствующих графических построений на плоскости.

1. «Обратная» задача для неразветвленной магнитной цепи

Решение задач подобного типа осуществляется в следующей последовательности.

1. Задаются значениями потока и определяют для них НС $F = \sum Hl$, как при решении «прямой» задачи. При этом следует стремиться подобрать два достаточно близких значения потока, чтобы получить $\sum Hl$, несколько меньшую и несколько большую заданной величины НС.

2. По полученным данным строится часть характеристики $\Phi(\sum Hl)$ магнитной цепи (вблизи заданного значения НС) и по ней определяется поток, соответствующий заданной величине НС.

При расчете неразветвленных магнитных цепей, содержащих воздушные зазоры, удобно использовать метод пересечений, при котором искомое решение определяется точкой пересечения нелинейной вебер-амперной характеристики нелинейной части цепи и линейной характеристики линейного участка, строящейся на основании уравнения

$$\sum Hl = \sum Iw - \sum H_{\delta}\delta = \sum Iw - \Phi \sum R_{M\delta},$$

где $R_{M\delta} = \delta/(\mu_0 S_{\delta})$ – магнитное сопротивление воздушного зазора.

2. «Обратная» задача для разветвленной магнитной цепи

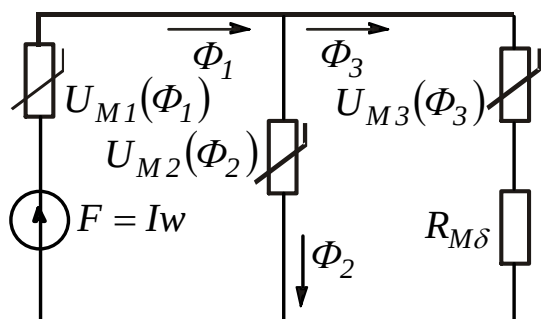


Рис. 3.29

Замена магнитной цепи эквивалентной электрической схемой замещения (см. рис. 3.29, на котором приведена схема замещения магнитной цепи на рис. 3.28) позволяет решать задачи данного типа с использованием всех графических методов и приемов, применяемых при анализе аналогичных нелинейных электрических цепей постоянного

тока.

В этом случае при расчете магнитных цепей, содержащих два узла (такую конфигурацию имеет большое число используемых на практике магнитопроводов), широко используется метод двух узлов. Идея решения данным методом аналогична рассмотренной для нелинейных резистивных цепей постоянного тока и заключается в следующем.

1. Вычисляются зависимости $\Phi_i(U_{Mmn})$ потоков во всех i -х ветвях магнитной цепи в функции общей величины – магнитного напряжения U_{Mmn} между узлами m и n .

2. Определяется, в какой точке графически реализуется первый закон Кирхгофа $\sum \Phi_i(U_{Mmn}) = 0$. Соответствующие данной точке потоки являются решением задачи.

В качестве примера решения «обратной» задачи проведем расчет магнитной цепи на рис. 3.30.

Магнитопровод на рис. 3.30 имеет следующие геометрические размеры:

$$l_1 = 11 \text{ м}; l_2 = 3,5 \text{ м}; l_3 = 13 \text{ м};$$

$$S_1 = 1,95 \text{ м}^2; S_2 = 0,965 \text{ м}^2;$$

$$S_3 = 1,25 \text{ м}^2.$$

Зависимость $\hat{A}(\hat{I})$ задана в табл. 3.12. Определить поток $\hat{O}_2$ и НС F_1 , если

$$\hat{O}_1 = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ А}; F_2 = 20 \text{ А};$$

$$F_3 = 19,6 \text{ А}.$$

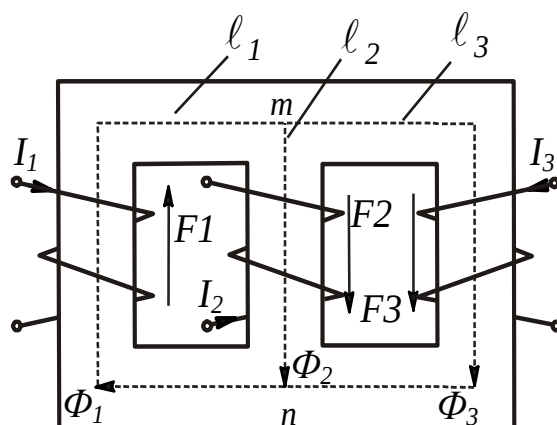


Рис. 3.30

Таблица 3.12. Зависимость $B(H)$

$H, \text{А/м}$	0,2	0,4	0,6	0,8	1,2	2,0	4,0	6,0	8,0
$B, \text{Тл}$	0,22	0,75	0,93	1,02	1,14	1,28	1,47	1,53	1,57

Алгоритм решения задачи

1. Записываем для магнитной цепи уравнения вида

$$U_{Mmn} = H_2 l_2 - F_2;$$

$$U_{Mmn} = H_3 l_3 - F_3.$$

2. Задаемся потоком $\hat{O}_2$ и рассчитываем U_{Mmn} , а затем по U_{Mmn} находим $\hat{O}_3$. Результаты расчетов сводим в табл. 3.13 и в ее последней колонке определяем сумму $\sum \hat{O} = \hat{O}_2 + \hat{O}_3$. Эта сумма в соответствии с первым законом Кирхгофа для магнитных цепей должна равняться $\hat{O}_1$, поэтому получающаяся в последней колонке величина $\sum \hat{O}$ указывает, каким значением $\hat{O}_2$ следует задаваться на следующем шаге расчета.

3. Строим кривую зависимости $\sum \hat{O}(U_{Mmn})$ (см. рис. 3.31), по которой определяем, что заданной величине $\hat{O}_1$ соответствует магнитное напряжение $U_{Mmn} = -10 \text{ А}$.

Таблица 3.13. Результаты вычислений

$\hat{O}_2 \times 10^{-4}, \hat{A}\acute{a}$	$\hat{A}_2, \ddot{O}\ddot{e}$	$\hat{I}_2, \hat{A}/\tilde{m}$	$U_{Mmn} = \hat{I}_2 l_2 - F_2, A$	$\hat{I}_3 = \frac{U_{Mmn} + F_3}{l_3}, A/\tilde{m}$
1	1,04	0,82	-17,13	0,19
1,2	1,24	1,15	-15,98	0,28
1,4	1,45	3,8	-6,7	0,99
1,5	1,55	7	4,5	1,85

Окончание табл.3.13

$B_3, \ddot{O}\ddot{e}$	$\hat{O}_3 \times 10^{-4}, \hat{A}\acute{a}$	$\sum \hat{O} = (\hat{O}_2 + \hat{O}_3) \times 10^{-4}, B\grave{o}$
0,2	0,25	1,25
0,44	0,55	1,75
1,08	1,35	2,75
1,26	1,575	3,075

4. По найденному значению U_{Mmn} определяем магнитную напряженность:

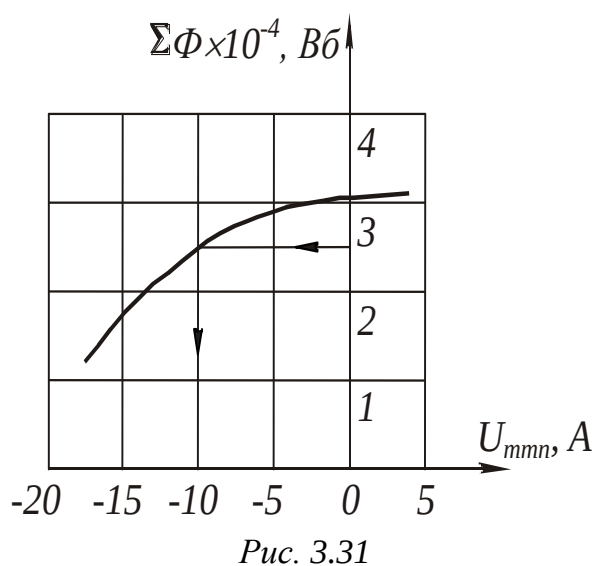


Рис. 3.31

$$H_2 = \frac{U_{Mmn} + F_2}{l_2} = 2,86 A/\tilde{m}.$$

Тогда $\hat{A}_2 = 1,42 \ddot{O}\ddot{e}$.

5. Определяем искомый поток во втором стержне магнитопровода:

$$\hat{O}_2 = \hat{A}_2 S_2 = 1,37 \cdot 10^{-4} \hat{A}\acute{a}.$$

6. Вычисляем магнитную индукцию на первом участке магнитопровода:

$$\hat{A}_1 = \frac{\hat{O}_1}{S_1} = 1,28 \ddot{O}\ddot{e}.$$

Соответствующее ей значение напряженности $\hat{I}_1 = 2 \hat{A}/\tilde{m}$.

7. По второму закону Кирхгофа для магнитных цепей определяем искомое значение НС F_1 :

$$F_1 = H_1 l_1 + H_2 l_2 - F_2 = 12,01 A.$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 3.1

В схеме на рис. 3.32 $E_1 = 24 \text{ В}$, $R_1 = R_2 = 4 \hat{\text{И}}$, $R_3 = 3 \hat{\text{И}}$, $R_4 = 1 \hat{\text{И}}$.

ВАХ НР приведена на рис. 3.33.

Определить ток I через НР и ток I_1 в ветви с источником ЭДС E_1 .

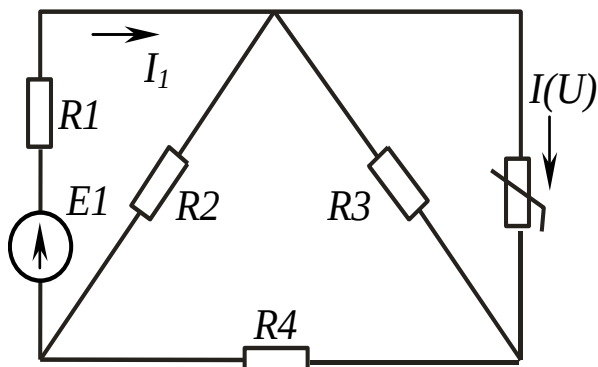


Рис. 3.32

Решение

1. Разомкнем ветвь с НР и определим параметры U_{∞} и R_{∞} АД, эквивалентного линейной части схемы:

$$U_{\infty} = E \frac{R_2 R_3}{R_1 (R_2 + R_3 + R_4) + R_2 (R_3 + R_4)} = 6 \hat{\text{А}};$$

$$R_{\infty} = \frac{\left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_4 \right) R_3}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_4 + R_3} = 1,5 \hat{\text{И}}.$$

2. Решая задачу методом пересечений, как это показано на рис. 3.33, где $I_{\infty} = U_{\infty} / R_{\infty} = 4 \text{ А}$, получаем ток через НР, равный $I = 2,9 \hat{\text{А}}$.

При этом напряжение на НР $U = 1,8 \text{ В}$.

3. Для определения тока I_1 , протекающего в ветви с источником ЭДС E_1 , в соответствии с теоремой о компенсации заменим НР на источник ЭДС с $E_2 = U = 1,8 \hat{\text{А}}$ и перейдем к линейной схеме, изображенной на рис. 3.34. Составим для нее систему уравнений по методу контурных токов:

$$\begin{aligned} I_I (R_1 + R_2) - I_{II} R_2 &= E_1; \\ -I_I R_2 + I_{II} (R_2 + R_4) &= -E_2, \end{aligned}$$

и после ее решения получим $I_I = I_{II} = 4,8 \text{ А}$.

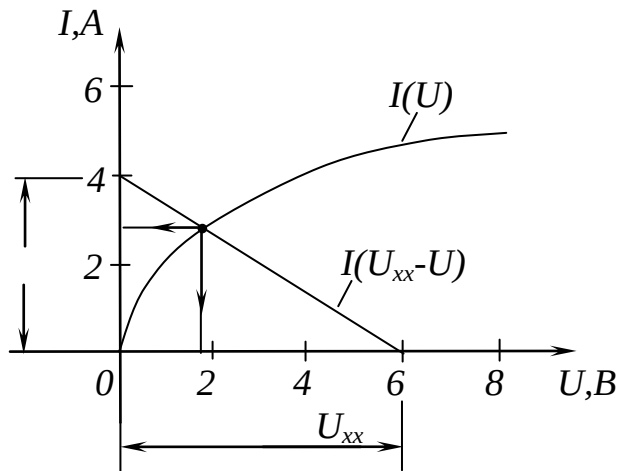


Рис. 3.33

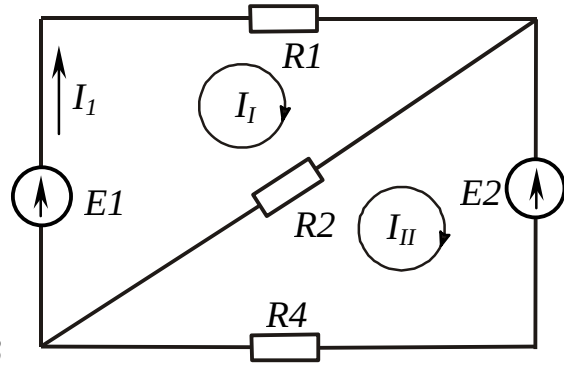


Рис. 3.34

Пример 3.2

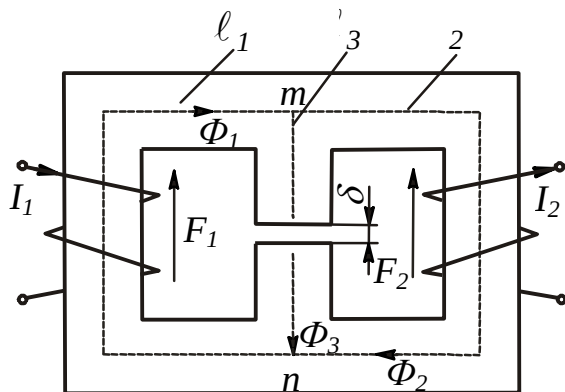


Рис. 3.35

В первом и втором стержнях магнитопровода на рис. 3.35, выполненного из стали с зависимостью $\hat{A}(\hat{I})$, приведенной в табл. 3.12, создаются магнитные потоки

$$\hat{O}_1 = 4 \cdot 10^{-4} \hat{A} \text{ и } \hat{O}_2 = 2 \cdot 10^{-4} \hat{A}.$$

Геометрические размеры сердечника: $l_1 = 60 \text{ см}$; $l_2 = 80 \text{ см}$; $l_3 = 20 \text{ см}$; $\delta = 0,25 \text{ см}$;

$$S_1 = S_2 = S_3 = 10 \text{ см}^2.$$

Определить НС F_1 и F_2 обмоток и рассчитать магнитные сопротивления R_{M1} , R_{M2} , R_{M3} стержней магнитопровода.

Решение

1. В соответствии с первым законом Кирхгофа для магнитных цепей определим магнитный поток в третьем стержне магнитопровода:

$$\hat{O}_3 = \hat{O}_1 - \hat{O}_2 = 4 \cdot 10^{-4} - 2 \cdot 10^{-4} = 2 \cdot 10^{-4} \hat{A}.$$

2. По известным потокам найдем магнитные индукции на участках магнитопровода:

$$\hat{A}_1 = \frac{\hat{O}_1}{S_1} = \frac{4 \cdot 10^{-4}}{10^{-3}} = 0,4 \text{ Тл};$$

$$\hat{A}_2 = \frac{\hat{O}_2}{S_2} = \frac{3 \cdot 10^{-4}}{10^{-3}} = 0,3 \text{ Òë};$$

$$\hat{A}_3 = \frac{\hat{O}_3}{S_3} = \frac{10^{-4}}{10^{-3}} = 0,1 \text{ Òë}.$$

3. По найденным магнитным индукциям с использованием зависимости $\hat{A}(\hat{I})$ определим напряженности на соответствующих участках магнитопровода: $\hat{I}_1 = 29 \text{ Òë}$, $\hat{I}_2 = 24 \text{ Òë}$, $\hat{I}_3 = 13 \text{ Òë}$, $\hat{I}_\delta = B_3/\mu_0 = 0,1/(4\pi \cdot 10^{-7}) = 79577 \text{ Òë}$.

4. В соответствии со вторым законом Кирхгофа для магнитных цепей найдем искомые значения НС:

$$F_1 = H_1 l_1 + H_3 l_3 + H_\delta l_\delta = 29 \cdot 0,6 + 13 \cdot 0,2 + 79577 \cdot 0,0025 = 219 \text{ Òë};$$

$$F_2 = H_3 l_3 + H_\delta l_\delta - H_2 l_2 = 13 \cdot 0,2 + 79577 \cdot 0,0025 - 24 \cdot 0,8 = 182 \text{ Òë}.$$

5. Рассчитаем магнитные сопротивления стержней магнитопровода:

$$R_{i1} = \frac{l_1}{\mu_0 \mu_1 S_1} = \frac{l_1 H_1}{B_1 S_1} = \frac{l_1 H_1}{\hat{O}_1} = \frac{0,6 \cdot 29}{4 \cdot 10^{-4}} = 43500 \text{ Òë}^{-1};$$

$$R_{i2} = \frac{l_2}{\mu_0 \mu_2 S_2} = \frac{l_2 H_2}{B_2 S_2} = \frac{l_2 H_2}{\hat{O}_2} = \frac{0,8 \cdot 24}{3 \cdot 10^{-4}} = 64000 \text{ Òë}^{-1};$$

$$\begin{aligned} R_{i3} &= R'_{i3} + R_\delta = \frac{l_3}{\mu_0 \mu_3 S_3} + \frac{\delta}{\mu_0 S_3} = \frac{l_3 H_3}{B_3 S_3} + \frac{\delta}{\mu_0 S_3} = \frac{l_3 H_3}{\hat{O}_3} + \frac{\delta}{\mu_0 S_3} = \\ &= \frac{0,2 \cdot 13}{10^{-4}} + \frac{0,25 \cdot 10^{-2}}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^{-3}} = 2015437 \text{ Òë}^{-1}. \end{aligned}$$

ЗАДАНИЕ 4. НЕЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА В СТАЦИОНАРНЫХ РЕЖИМАХ

Задание 4 имеет два уровня сложности. **Первый уровень** включает в себя две задачи, первая из которых посвящена расчету нелинейной электрической цепи по действующим значениям (рис. 4.2 ÷ 4.13) (задача 4.1), а вторая – определению параметров схемы замещения катушки с ферромагнитным сердечником (задача 4.2). **Второй уровень** включает в себя задачу 4.2, а также задачу по расчету параметров схемы замещения катушки с ферромагнитным сердечником, имеющим воздушный зазор (задача 4.3).

Задача 4.1. По данным, приведенным в табл. 4.1, выполнить следующее:

1. Определить все токи и напряжения при воздействии на электрическую цепь переменного синусоидального напряжения с действующим значением U_1 (вольт-амперная характеристика нелинейного элемента задана для действующих значений, (рис. 4.14, 4.15).

2. Построить для электрической цепи векторную диаграмму токов и топографическую диаграмму напряжений.

Задача 4.2. Катушка с сердечником из трансформаторной стали с числом витков w и активным сопротивлением R включена на переменное напряжение с действующим значением U и частотой f (табл. 4.2). При токе I катушки потребляемая от источника активная мощность равна P . Амплитуда потока в магнитопроводе – Φ_m . Согласно заданному варианту составить для катушки с сердечником эквивалентную схему замещения (а – последовательную, б – параллельную), определить параметры последней и построить векторную диаграмму.

Задача 4.3. Катушка с ферромагнитным сердечником (рис. 4.1), параметры которой приведены в табл. 4.3, включена на переменное напряжение с действующим значением U и частотой f . Пренебрегая рассеянием и потерями в сердечнике, при заданных активном сопротивлении R катушки и относительной магнитной проницаемости μ стали сердечника определить потребляемый ток и активную мощность, а также построить векторную диаграмму. На рис. 4.1 ℓ и S – соответственно длина средней силовой линии и площадь сечения магнитопровода.

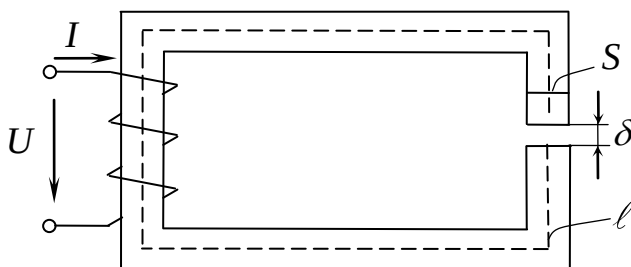


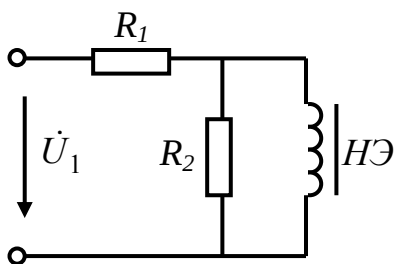
Рис. 4.1

Таблица 4.1. Значения параметров электрических цепей к задаче 4.1

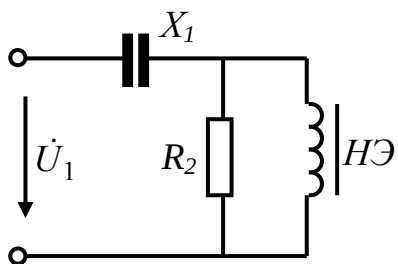
Номер варианта	Номер рис. схемы	Номер рис. ВАХ НЭ	U_1 , В	R_1 (или X_1), Ом	R_2 (или X_2) Ом
1	2	3	4	5	6
1	4.2	4.14,а	260	40	60
2	4.3	4.14,б	300	100	120
3	4.4	4.15,в	315	60	40
4	4.5	4.15,а	340	100	130
5	4.6	4.14,б	360	50	55
6	4.7	4.15,а	250	45	55
7	4.8	4.14,б	265	40	65
8	4.9	4.14,в	325	45	55
9	4.10	4.15,а	330	110	125
10	4.11	4.14,б	340	100	115
11	4.12	4.15,а	355	40	40
12	4.13	4.15,а	360	50	55
13	4.2	4.14,б	255	60	55
14	4.3	4.14,а	270	120	120
15	4.4	4.15,в	280	45	55
16	4.5	4.14,б	290	100	115
17	4.6	4.14,а	310	50	60
18	4.7	4.14,в	320	40	50
19	4.8	4.15,б	330	70	75
20	4.9	4.15,а	350	70	80
21	4.10	4.14,а	360	130	110
22	4.11	4.14,в	310	120	100
23	4.12	4.15,б	250	40	45
24	4.13	4.15,а	260	45	50
25	4.2	4.14,б	270	50	55
26	4.3	4.14,а	280	100	110
27	4.4	4.15,в	290	60	65
28	4.5	4.14,а	300	130	100
29	4.6	4.15,б	350	70	80
30	4.7	4.15,в	305	65	75
31	4.8	4.14,а	310	60	65
32	4.9	4.14,б	245	45	40
33	4.10	4.15,в	265	100	110
34	4.11	4.14,а	270	115	105
35	4.12	4.15,б	275	50	45
36	4.13	4.15,в	290	50	60
37	4.2	4.14,а	320	60	60
38	4.3	4.14,а	330	125	110
39	4.4	4.15,в	315	50	60
40	4.5	4.15,б	340	110	125
41	4.6	4.14,в	350	70	80
42	4.7	4.14,а	360	65	75
43	4.8	4.15,б	355	70	75
44	4.9	4.15,а	345	70	65
45	4.10	4.15,б	300	100	115
46	4.11	4.14,в	240	130	90
47	4.12	4.15,б	250	45	40

Окончание табл. 4.1

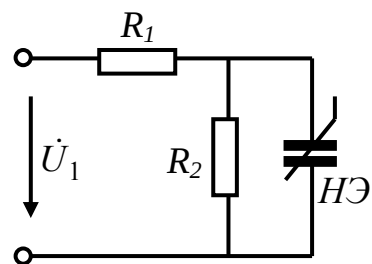
1	2	3	4	5	6
48	4.13	4.14,a	260	45	50
49	4.2	4.14,B	270	55	55
50	4.3	4.14,a	300	110	110
51	4.4	4.15,б	320	60	65
52	4.5	4.15,B	360	100	130
53	4.6	4.15,a	240	40	45
54	4.7	4.14,б	245	45	50
55	4.8	4.15,a	255	40	45
56	4.9	4.14,B	275	50	55
57	4.10	4.15,б	280	110	90
58	4.11	4.14,a	300	125	115
59	4.12	4.15,B	290	55	60
60	4.13	4.15,б	315	60	65
61	4.2	4.14,a	320	65	55
62	4.3	4.14,б	335	120	100
63	4.4	4.15,a	345	70	75
64	4.5	4.15,B	250	125	95
65	4.6	4.14,B	270	50	60
66	4.7	4.14,a	275	60	55
67	4.8	4.15,б	280	60	40
68	4.9	4.15,B	320	65	70
69	4.10	4.14,a	330	100	115
70	4.11	4.14,б	340	115	95
71	4.12	4.15,B	355	70	80
72	4.13	4.15,a	360	70	80
73	4.2	4.14,б	345	60	70
74	4.3	4.14,B	350	130	110
75	4.4	4.15,a	325	80	55
76	4.5	4.15,a	310	100	120
77	4.6	4.15,б	300	50	60
78	4.7	4.14,B	270	65	60
79	4.8	4.14,a	260	40	50
80	4.9	4.14,б	270	60	50
81	4.10	4.15,B	245	85	120
82	4.11	4.14,a	255	100	85
83	4.12	4.15,б	265	40	50
84	4.13	4.14,B	270	55	65
85	4.2	4.14,a	325	70	80
86	4.3	4.14,б	330	125	115
87	4.4	4.15,a	345	65	85
88	4.5	4.14,B	350	130	110
89	4.6	4.15,a	360	80	60
90	4.7	4.14,б	355	80	70
91	4.8	4.15,B	345	70	75
92	4.9	4.15,a	255	50	60
93	4.10	4.15,б	290	100	90
94	4.11	4.14,B	295	100	100
95	4.12	4.15,a	300	65	70
96	4.13	4.14,б	275	50	70
97	4.2	4.14,B	265	50	60
98	4.3	4.14,a	250	80	70
99	4.4	4.15,a	255	50	40
100	4.5	4.14,б	260	90	70



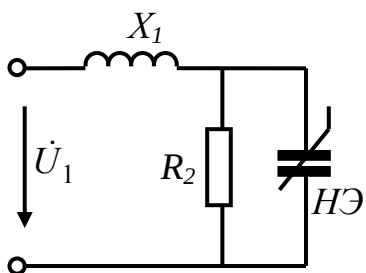
Puc. 4.2



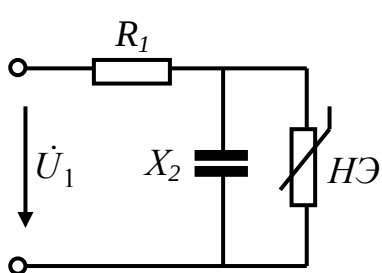
Puc. 4.3



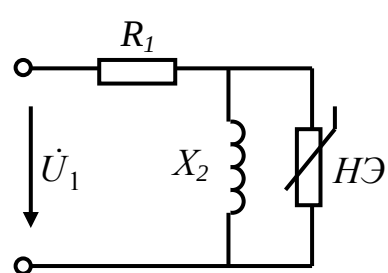
Puc. 4.4



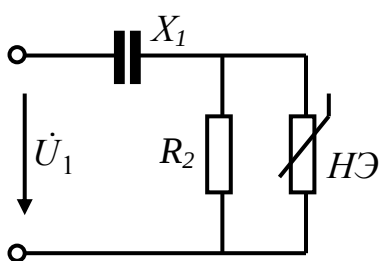
Puc. 4.5



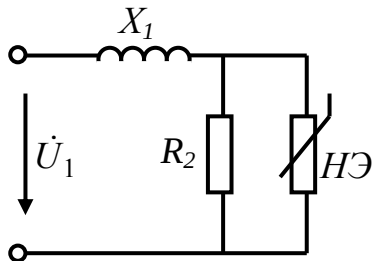
Puc. 4.6



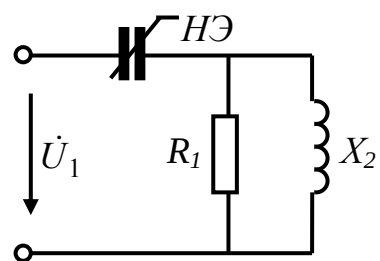
Puc. 4.7



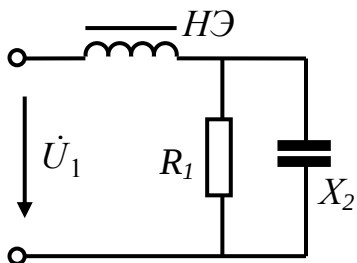
Puc. 4.8



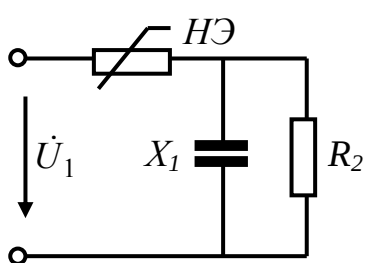
Puc. 4.9



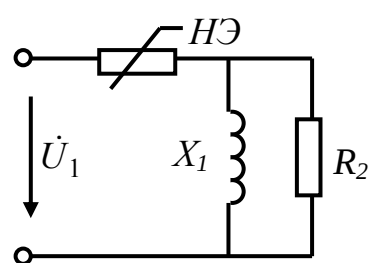
Puc. 4.10



Puc. 4.11



Puc. 4.12



Puc. 4.13

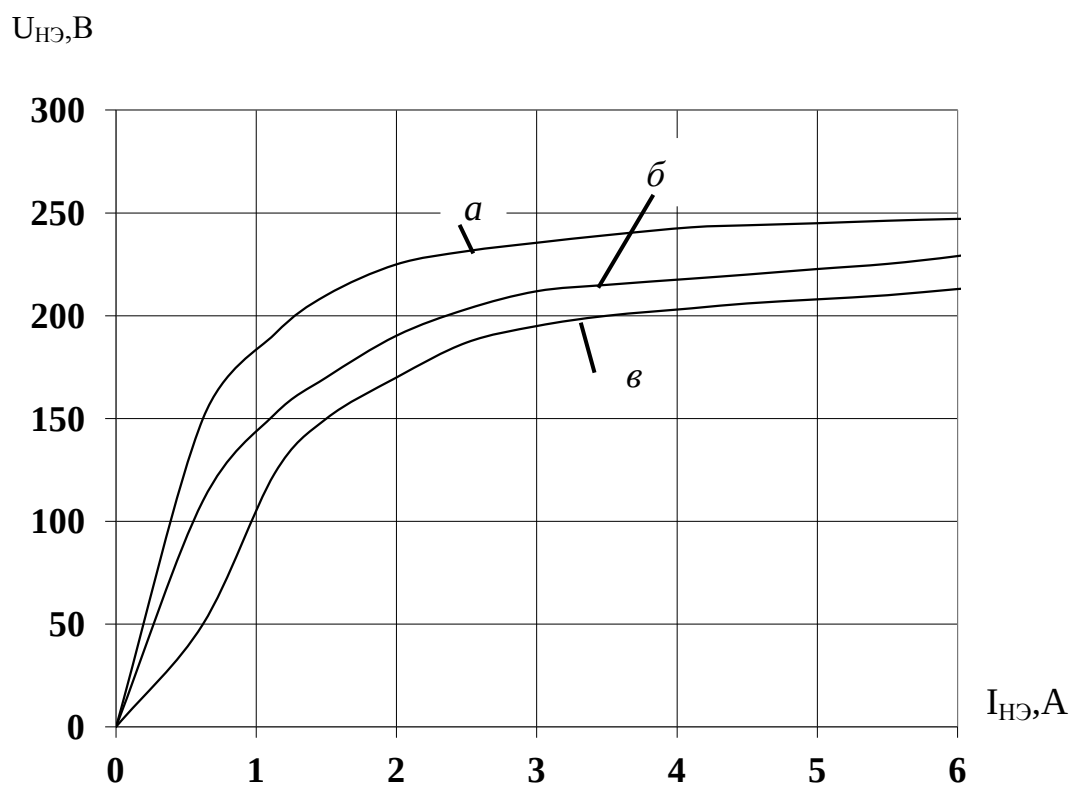


Рис. 4.14

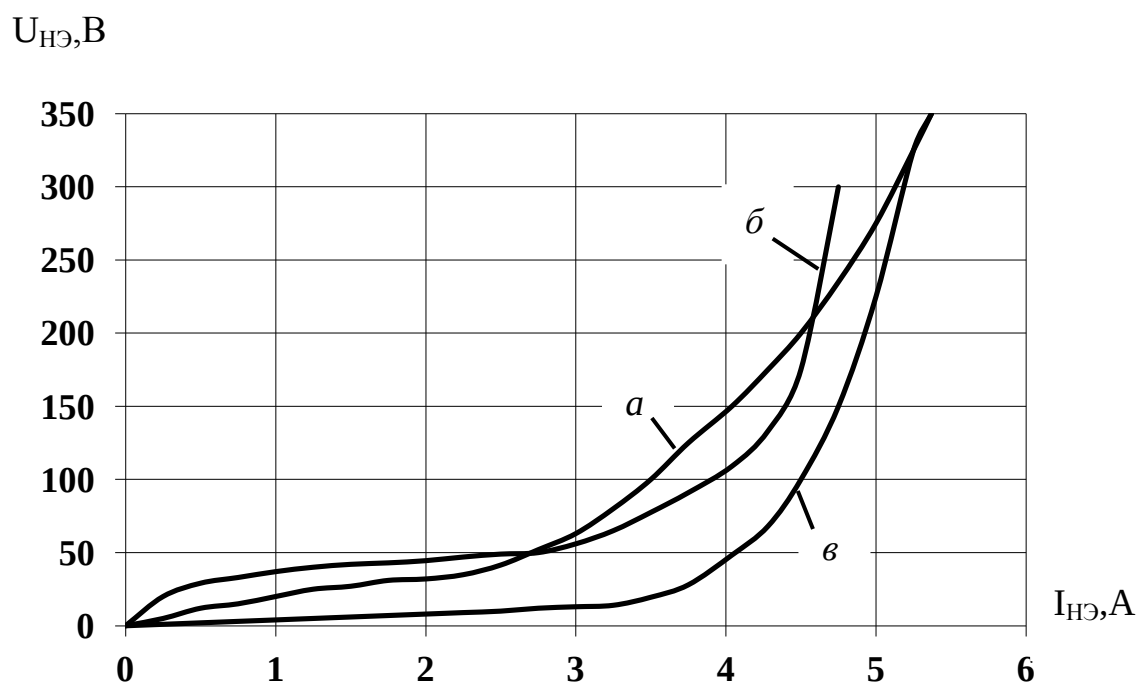


Рис. 4.15

Таблица 4.2. Значения параметров к задаче 4.2

Номер варианта	U, В	f, Гц	R, Ом	I, А	P, Вт	w	$\Phi_m \times 10^3$, Вб	Вариант схемы
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	220	50	10	10	1500	500	1	б
2	220	50	10	10	1500	500	1	а
3	200	45	6	5	300	600	1,2	б
4	200	40	6	5	300	600	1,2	а
5	200	40	12	5	600	600	1,2	б
6	200	60	12	5	600	600	1,2	а
7	220	60	10	5	500	720	1	б
8	220	45	10	5	500	720	1	а
9	400	45	10	10	2000	1100	1,2	б
10	400	45	10	10	2000	1100	1,2	а
11	220	55	10	10	1500	600	0,8	б
12	220	55	10	10	1500	600	0,8	а
13	220	50	10	10	1300	500	1	б
14	220	50	10	10	1300	500	1	а
15	200	45	6	5	400	600	1,2	б
16	200	40	6	5	400	600	1,2	а
17	200	40	12	5	800	600	1,2	б
18	200	60	12	5	800	600	1,2	а
19	220	60	10	5	600	720	1	б
20	220	45	10	5	600	720	1	а
21	400	45	10	10	2200	1100	1,2	б
22	400	45	10	10	2200	1100	1,2	а
23	220	55	10	10	1700	600	0,8	б
24	220	55	10	10	1700	600	0,8	а
25	220	50	10	10	1500	600	1	б
26	220	50	10	10	1500	600	1	а
27	200	45	6	5	300	500	1,2	б
28	200	40	6	5	300	500	1,2	а
29	200	40	12	5	600	700	1,2	б
30	200	60	12	5	600	700	1,2	а
31	220	60	10	5	500	620	1	б
32	220	45	10	5	500	620	1	а
33	400	45	10	10	2000	1200	1,2	б
34	400	45	10	10	2000	1200	1,2	а
35	220	55	10	10	1500	700	0,8	б
36	220	55	10	10	1500	700	0,8	а
37	250	50	10	10	1500	500	1	б
38	250	50	10	10	1500	500	1	а
39	210	45	6	5	300	600	1,2	б
40	210	40	6	5	300	600	1,2	а
41	180	40	12	5	600	600	1,2	б
42	180	60	12	5	600	600	1,2	а
43	240	60	10	5	500	720	1	б
44	240	45	10	5	500	720	1	а
45	350	45	10	10	2000	1100	1,2	б
46	350	45	10	10	2000	1100	1,2	а

Продолжение табл. 4.2

1	2	3	4	5	6	7	8	9
47	250	55	10	10	1500	600	0,8	б
48	250	55	10	10	1500	600	0,8	а
49	220	50	10	10	1500	500	1	б
50	220	50	10	10	1500	500	1	а
51	200	45	6	5	300	600	1,2	б
52	200	40	6	5	300	600	1,2	а
53	200	40	12	5	600	600	1,2	б
54	200	60	12	5	600	600	1,2	а
55	220	60	10	5	500	720	1	б
56	220	45	10	5	500	720	1	а
57	400	45	10	10	2000	1100	1,2	б
58	400	45	10	10	2000	1100	1,2	а
59	220	55	10	10	1500	600	0,8	б
60	220	55	10	10	1500	600	0,8	а
61	220	50	10	10	1300	500	1	б
62	220	50	10	10	1300	500	1	а
63	200	45	6	5	400	600	1,2	б
64	200	40	6	5	400	600	1,2	а
65	200	40	12	5	800	600	1,2	б
66	200	60	12	5	800	600	1,2	а
67	220	60	10	5	600	720	1	б
68	220	45	10	5	600	720	1	а
69	400	45	10	10	2200	1100	1,2	б
70	400	45	10	10	2200	1100	1,2	а
71	220	55	10	10	1700	600	0,8	б
72	220	55	10	10	1700	600	0,8	а
73	220	50	10	10	1500	600	1	б
74	220	50	10	10	1500	600	1	а
75	200	45	6	5	300	500	1,2	б
76	200	40	6	5	300	500	1,2	а
77	200	40	12	5	600	700	1,2	б
78	200	60	12	5	600	700	1,2	а
79	220	60	10	5	500	620	1	б
80	220	45	10	5	500	620	1	а
81	400	45	10	10	2000	1200	1,2	б
82	400	45	10	10	2000	1200	1,2	а
83	220	55	10	10	1500	700	0,8	б
84	220	55	10	10	1500	700	0,8	а
85	250	50	10	10	1500	500	1	б
86	250	50	10	10	1500	500	1	а
87	210	45	6	5	300	600	1,2	б
88	210	40	6	5	300	600	1,2	а
89	180	40	12	5	600	600	1,2	б
90	180	60	12	5	600	600	1,2	а
91	240	60	10	5	500	720	1	б
92	240	45	10	5	500	720	1	а
93	350	45	10	10	2000	1100	1,2	б
94	350	45	10	10	2000	1100	1,2	а

Окончание табл. 4.2

1	2	3	4	5	6	7	8	9
95	250	55	10	10	1500	600	0,8	б
96	250	55	10	10	1500	600	0,8	а
97	220	50	10	10	1500	500	1	б
98	220	50	10	10	1500	500	1	а
99	200	45	6	5	300	600	1,2	б
100	200	40	6	5	300	600	1,2	а

Таблица 4.3. Значения параметров к задаче 4.3

Номер варианта	U, В	f, Гц	w	R, Ом	l, см	S, см ²	δ, мм	μ
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	127	50	1000	100	50	10	1,5	5000
2	127	50	900	100	60	7	1	5500
3	127	50	950	150	55	10	1	5000
4	220	50	800	80	40	15	1,5	6000
5	220	50	850	80	50	20	1,5	5000
6	127	50	700	100	60	10	1	4500
7	127	50	750	110	50	7	1	4000
8	127	50	1000	90	60	10	1,5	4500
9	127	50	900	140	50	10	1	5000
10	220	50	950	90	60	20	1,5	5500
11	127	50	850	110	50	10	1	6000
12	220	50	800	80	50	15	1,5	5500
13	220	50	1000	100	60	20	1,5	5000
14	127	60	1000	100	50	10	1,5	5000
15	127	60	900	100	60	7	1	5500
16	127	60	950	150	55	10	1	5000
17	220	60	800	80	40	15	1,5	6000
18	220	60	850	80	50	20	1,5	5000
19	127	60	700	100	60	10	1	4500
20	127	60	750	110	50	7	1	4000
21	127	60	1000	90	60	10	1,5	4500
22	127	60	900	140	50	10	1	5000
23	220	60	950	90	60	20	1,5	5500
24	127	60	850	110	50	10	1	6000
25	220	60	800	80	50	15	1,5	5500
26	220	60	1000	100	60	20	1,5	5000
27	127	50	800	100	50	10	1,5	5000
28	127	50	700	100	60	7	1	5500
19	127	60	700	100	60	10	1	4500
20	127	60	750	110	50	7	1	4000
21	127	60	1000	90	60	10	1,5	4500
22	127	60	900	140	50	10	1	5000
23	220	60	950	90	60	20	1,5	5500
24	127	60	850	110	50	10	1	6000
25	220	60	800	80	50	15	1,5	5500
26	220	60	1000	100	60	20	1,5	5000
27	127	50	800	100	50	10	1,5	5000

Продолжение табл. 4.3

1	2	3	4	5	6	7	8	9
28	127	50	700	100	60	7	1	5500
29	127	50	750	150	55	10	1	5000
30	220	50	900	80	40	15	1,5	6000
31	220	50	750	80	50	20	1,5	5000
32	127	50	600	100	60	10	1	4500
33	127	50	950	110	50	7	1	4000
34	127	50	1200	90	60	10	1,5	4500
35	127	50	1100	140	50	10	1	5000
36	220	50	850	90	60	20	1,5	5500
37	127	50	1000	110	50	10	1	6000
38	220	50	700	80	50	15	1,5	5500
39	220	50	1200	100	60	20	1,5	5000
40	127	50	1000	100	50	10	1,5	5000
41	127	50	900	100	60	7	1	5500
42	127	50	950	150	55	10	1	5000
43	220	50	800	80	40	15	1,5	6000
44	220	50	850	80	50	20	1,5	5000
45	127	50	700	100	60	10	1	4500
46	127	50	750	110	50	7	1	4000
47	127	50	1000	90	60	10	1,5	4500
48	127	50	900	140	50	10	1	5000
49	220	50	950	90	60	20	1,5	5500
50	127	50	850	110	50	10	1	6000
51	220	50	800	80	50	15	1,5	5500
52	220	50	1000	100	60	20	1,5	5000
53	127	60	1000	100	50	10	1,5	5000
54	127	60	900	100	60	7	1	5500
55	127	60	950	150	55	10	1	5000
56	220	60	800	80	40	15	1,5	6000
57	220	60	850	80	50	20	1,5	5000
58	127	60	700	100	60	10	1	4500
59	127	60	750	110	50	7	1	4000
60	127	60	1000	90	60	10	1,5	4500
61	127	60	700	100	60	10	1	4500
62	127	60	750	110	50	7	1	4000
63	127	60	1000	90	60	10	1,5	4500
64	127	60	900	140	50	10	1	5000
65	220	60	950	90	60	20	1,5	5500
66	127	60	850	110	50	10	1	6000
67	220	60	800	80	50	15	1,5	5500
68	220	60	1000	100	60	20	1,5	5000
69	127	50	800	100	50	10	1,5	5000
70	127	50	700	100	60	7	1	5500
71	127	50	750	150	55	10	1	5000
72	220	50	900	80	40	15	1,5	6000
73	220	50	750	80	50	20	1,5	5000
74	127	50	600	100	60	10	1	4500
75	127	50	950	110	50	7	1	4000

Окончание табл. 4.3

1	2	3	4	5	6	7	8	9
76	127	50	1200	90	60	10	1,5	4500
77	127	50	1100	140	50	10	1	5000
78	220	50	850	90	60	20	1,5	5500
79	127	50	1000	110	50	10	1	6000
80	220	50	700	80	50	15	1,5	5500
81	220	50	1200	100	60	20	1,5	5000
82	127	50	1000	100	50	10	1,5	5000
83	127	50	900	100	60	7	1	5500
84	127	50	950	150	55	10	1	5000
85	220	50	800	80	40	15	1,5	6000
86	220	50	850	80	50	20	1,5	5000
87	127	50	700	100	60	10	1	4500
88	127	50	750	110	50	7	1	4000
89	127	50	1000	90	60	10	1,5	4500
90	127	50	900	140	50	10	1	5000
91	220	50	950	90	60	20	1,5	5500
92	127	50	850	110	50	10	1	6000
93	220	50	800	80	50	15	1,5	5500
94	220	50	1000	100	60	20	1,5	5000
95	127	60	1000	100	50	10	1,5	5000
96	127	60	900	100	60	7	1	5500
97	127	60	950	150	55	10	1	5000
98	220	60	800	80	40	15	1,5	6000
99	220	60	850	80	50	20	1,5	5000
100	127	60	700	100	60	10	1	4500

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ К ЗАДАНИЮ 4

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА В СТАЦИОНАРНЫХ РЕЖИМАХ

Особенности нелинейных цепей при переменных токах

Наиболее существенная особенность расчета нелинейных цепей при переменных токах заключается в необходимости учета в общем случае динамических свойств нелинейных элементов, т.е. их анализ следует осуществлять на основе динамических вольт-амперных, вебер-амперных и кулон-вольтных характеристик.

Если нелинейный элемент является безынерционным, то его характеристики в динамических и статических режимах совпадают, что существенно упрощает расчет. Однако на практике идеально безынерционных элементов не существует. Отнесение нелинейного элемента к классу безынерционных определяется скоростью изменения входных воздействий: если период T переменного воздействия достаточно мал по сравнению с постоянной времени τ , характеризующей динамические свойства нелинейного элемента, последний рассматривается как безынерционный; если это не выполняется, то необходимо учитывать инерционные свойства нелинейного элемента.

В качестве примера можно рассмотреть цепь на рис. 4.16 с нелинейным резистором (термистором), имеющим вольт-амперную характеристику (ВАХ), представленную на рис. 4.17, и характеризующимся постоянной времени нагрева τ .

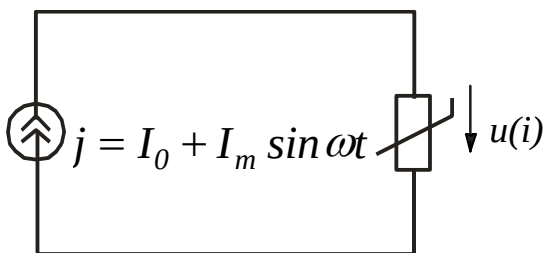


Рис. 4.16

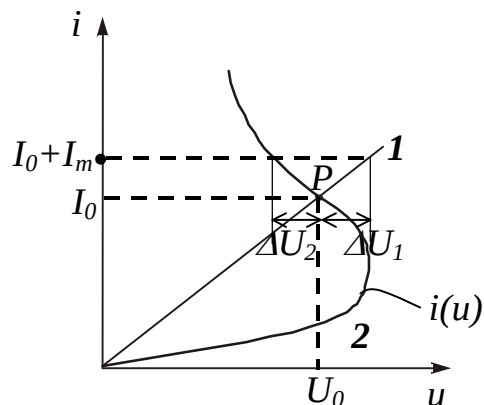


Рис. 4.17

Если $T = 2\pi / \omega \ll \tau$, то изображающая точка P перемещается по прямой 1 и нелинейный резистор характеризуется сопротивлением $R_1 \approx \Delta U_1 / I_m > 0$ ($I_m \ll I_0$). При $T \gg \tau$ изображающая точка перемещается по кривой 2 и свойства нелинейного резистора определяются сопротивлением $R_2 \approx \Delta U_2 / I_m < 0$. Если постоянная времени нагрева τ НР одного порядка с T , соотношения между

переменными составляющими напряжения и тока являются более сложными, определяющими сдвиг по фазе между ними.

Другой важной особенностью нелинейных элементов в цепи переменного тока является вызываемое ими появление высших гармоник даже при наличии в цепи только источников синусоидального напряжения и (или) тока. На этом принципе строится, например, ряд умножителей частоты, а также преобразователей формы тока или напряжения.

Использование динамических характеристик нелинейных элементов позволяет осуществлять расчет нелинейных цепей для мгновенных значений переменных, т.е. проводить принципиально ее наиболее точный и полный анализ. Однако в целом ряде случаев такой расчет может оказаться достаточно трудоемким или избыточным по своей глубине. Поэтому в зависимости от цели решаемой задачи, а также от требований к точности получаемых результатов помимо динамической характеристики могут использоваться нелинейные характеристики по первым гармоникам и для действующих значений.

Графический метод с использованием характеристик для мгновенных значений

В общем случае методика анализа нелинейной цепи данным методом включает в себя следующие этапы:

- исходя из физических соображений находят (если он не задан) закон изменения одной из величин, определяющих характеристику $y(x)$ нелинейного элемента;

- по нелинейной характеристике $y(x)$ для известного закона изменения переменной $x(t)$ путем графических построений определяют кривую $y(t)$ (или наоборот);

- с использованием полученной зависимости $y(t)$ проводят анализ остальной (линейной) части цепи.

Графический метод с использованием характеристик по первым гармоникам

При анализе нелинейной цепи данным методом изменяющиеся по сложному закону переменные величины заменяются их первыми гармониками, что позволяет использовать векторные диаграммы.

Основные этапы расчета:

- строится график зависимости $Y_m(X_m)$ нелинейного элемента для первых гармоник;

- произвольно задается амплитуда одной из переменных, например X_m , связанной с нелинейным элементом, и по характеристике $Y_m(X_m)$ последнего находится другая переменная (Y_m), определяющая режим

работы нелинейного элемента, после чего (принимая все величины синусоидально изменяющимися во времени) на основании построения векторной диаграммы определяется амплитуда первой гармоники Z_m переменной на входе цепи;

– путем построения ряда векторных диаграмм для различных значений X_m строится зависимость $Z_m(X_m)$, по которой для заданного значения Z_m определяется действительная величина X_m , на основании чего проводится окончательный анализ цепи.

Графический метод с использованием характеристик для действующих значений (метод эквивалентных синусоид)

При анализе нелинейной цепи данным методом реальные несинусоидально изменяющиеся переменные заменяются эквивалентными им синусоидальными величинами, действующие значения которых равны действующим значениям исходных несинусоидальных переменных. Кроме того, активная мощность, определяемая с помощью эквивалентных синусоидальных величин, должна быть равна активной мощности в цепи с реальной (несинусоидальной) формой переменных. Используемый прием перехода к синусоидальным величинам определяет другое название метода – **метод эквивалентных синусоид**.

Строго говоря, характеристика нелинейного элемента для действующих значений зависит от формы переменных, определяющих эту характеристику. Однако в первом приближении, особенно при качественном анализе, этим фактом обычно пренебрегают, считая характеристику неизменной для различных форм переменных. Указанное ограничивает возможности применения метода для цепей, где высшие гармоники играют существенную роль, например для цепей с резонансными явлениями на высших гармониках.

Переход к эквивалентным синусоидам позволяет использовать при анализе цепей векторные диаграммы. В связи с этим этапы расчета данным методом в общем случае совпадают с рассмотренными в предыдущем разделе.

Метод расчета с использованием характеристик для действующих значений широко применяется для исследования явлений в цепях, содержащих нелинейную катушку индуктивности и линейный конденсатор (**феррорезонансных цепях**), или цепях с линейной катушкой индуктивности и нелинейным конденсатором. Кроме того, данный метод применяется для анализа цепей с инерционными нелинейными элементами, у которых постоянная времени, характеризующая их инерционные свойства, много больше периода переменного напряжения (тока) источника питания. В этом случае в установившихся режимах инерционные нелинейные элементы можно

рассматривать как линейные с постоянными параметрами (сопротивлением, индуктивностью, емкостью). При этом сами параметры определяются по характеристикам нелинейных элементов для действующих значений и для различных величин последних являются разными.

Рассмотрим применение данного метода на основе анализа цепи на рис. 4.18 с нелинейным резистором (НР) и линейным конденсатором.

В цепи на рис. 4.18 емкость линейного конденсатора $\tilde{N} = 1 \text{ мкФ}$. ВАХ НР для действующих значений приведена на рис. 4.19, а его постоянная времени $\tilde{O}_D = 100 \text{ мс}$. Цепь питается от источника синусоидального напряжения, действующее значение которого $U_1 = 60 \text{ В}$ и частота $f = 50 \text{ Гц}$.

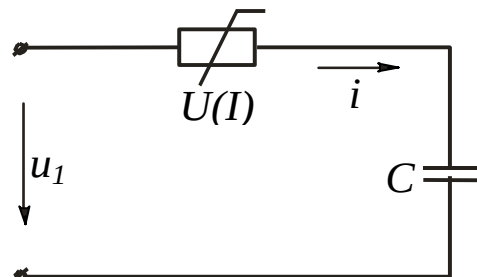


Рис. 4.18

Записать выражение для мгновенного значения тока $i(t)$.

Алгоритм решения задачи

1. Поскольку период питающего напряжения

$$T = \frac{1}{f} = 0,02 \text{ с}$$

много меньше постоянной времени $\tilde{O}_D$ НР, то последний в установившемся режиме можно рассматривать как линейный с некоторым постоянным сопротивлением, а ток $i(t)$ в цепи – синусоидальным.

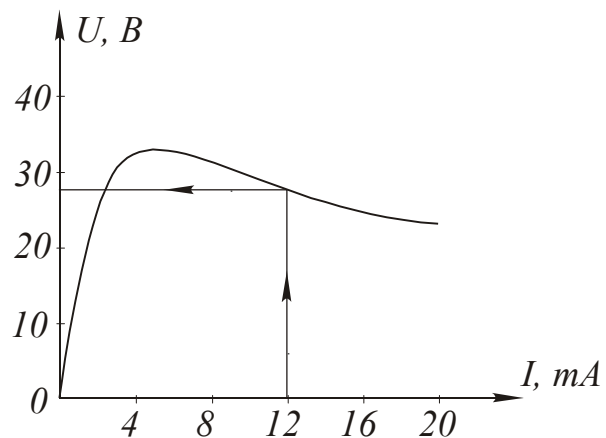


Рис. 4.19

2. Задаемся действующим значением тока через НР ($I = 12 \text{ мА}$) и по ВАХ НР (см. рис. 4.19) определяем соответствующее ему действующее значение напряжения: $U = 28 \text{ В}$.

3. Принимая масштаб по напряжению равным $m_U = 10 \text{ В/мм}$, строим векторную диаграмму (рис. 4.20) с учетом того, что для линейного конденсатора

$$U_{\tilde{N}} = \frac{1}{2\pi fC} I = 38 \text{ В}.$$

Из диаграммы определяем $U_1 = 47 \text{ В}$.

4. На основании построения векторных диаграмм для ряда других значений I строим (рис. 4.21) график зависимости $U_1(I)$, из которого для заданной величины $U_1 = 60 \text{ В}$ находим искомый ток: $I_1 = 18 \text{ мА}$.

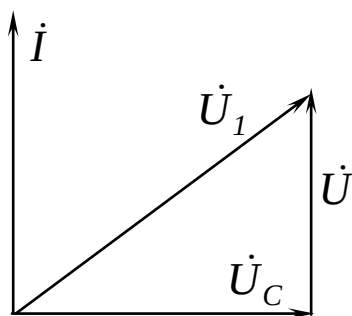


Рис. 4.20

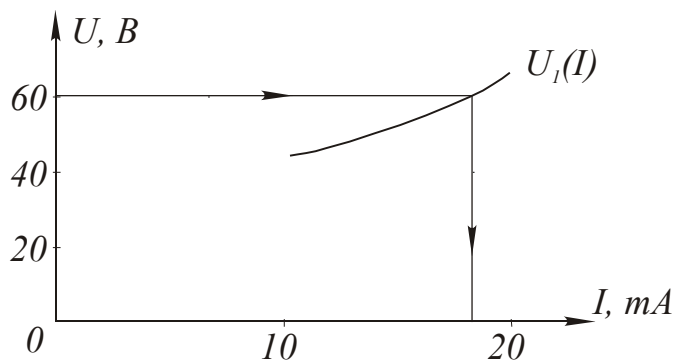


Рис. 4.21

Отсюда выражение для мгновенного значения тока в цепи имеет вид

$$i(t) = \sqrt{2}I \sin 2\pi ft = 25,5 \sin 314t \text{ mA}.$$

Аналитические методы расчета

Аналитические методы, в отличие от рассмотренных выше графических, позволяют проводить анализ нелинейной цепи в общем виде, а не для частных значений параметров элементов схемы. В этом заключается их главное преимущество. Однако аппроксимация нелинейной характеристики, лежащая в основе данных методов, изначально обуславливает внесение в расчеты большей или меньшей погрешности. Как и при графическом анализе цепей, при применении аналитических методов используются характеристики нелинейных элементов для мгновенных значений, по первым гармоникам и для действующих значений. При этом для расчета цепей переменного тока наиболее широкое распространение получили следующие аналитические методы:

- метод аналитической аппроксимации;
- метод кусочно-линейной аппроксимации;
- метод гармонического баланса;
- метод эквивалентных синусоид (метод расчета по действующим значениям).

Метод аналитической аппроксимации

Данный метод основан на аппроксимации характеристик нелинейных элементов аналитическими выражениями с последующим аналитическим решением системы нелинейных уравнений состояния цепи. Точность, а с другой стороны, сложность расчета методом аналитической аппроксимации непосредственно зависят от вида принятой аналитической функции, аппроксимирующей характеристику нелинейного элемента. Поэтому ее выбор является важнейшим этапом при анализе цепи данным методом. Для получения большей точности расчета необходимо выбирать аппроксимирующую функцию, наиболее

полно соответствующую исходной нелинейной характеристике, что, однако, может привести в общем случае к появлению в уравнениях состояния сложных математических выражений, часто трудно разрешимых (или вообще неразрешимых) аналитически. С другой стороны, принятие чрезмерно простой функции для аппроксимации позволяет достаточно быстро получить результат, однако погрешность расчета может оказаться недопустимо высокой. Таким образом, выбор аппроксимирующей функции во многом зависит от поставленной задачи расчета и требуемой точности его результатов.

Метод кусочно-линейной аппроксимации

В соответствии с определением данного метода расчет нелинейной цепи с его использованием включает в себя в общем случае следующие основные этапы.

1. Исходная характеристика нелинейного элемента заменяется ломаной линией с конечным числом прямолинейных отрезков.
2. Для каждого участка ломаной определяются эквивалентные линейные параметры нелинейного элемента и рисуются соответствующие линейные схемы замещения исходной цепи.
3. Решается линейная задача для каждого отрезка в отдельности.
4. На основании граничных условий определяются временные интервалы движения изображающей точки по каждому прямолинейному участку (границы существования отдельных решений).

Метод гармонического баланса

Применение аналитического выражения для аппроксимации характеристики нелинейного элемента позволяет наименее трудоемко провести расчет, когда закон изменения во времени одной из переменных, определяющих работу нелинейного элемента (ток или напряжение для резистора, потокосцепление или ток для катушки индуктивности, заряд или напряжение для конденсатора), задан или вытекает из предварительного анализа физических условий протекания процесса, что имело место при решении предыдущих задач данного раздела. Если такая определенность отсутствует, то задачу в общем случае можно решить только приближенно. Одним из таких методов, наиболее широко применимым на практике, является метод гармонического баланса.

Метод основан на разложении периодических функций в ряд Фурье. В общем случае искомые переменные в нелинейной электрической цепи несинусоидальны и содержат бесконечный спектр гармоник. Ожидаемое решение можно представить в виде суммы основной и нескольких высших гармоник, у которых неизвестными являются амплитуды и начальные фазы. Подставляя эту сумму в нелинейное дифференциальное уравнение, записанное для искомой величины, и приравнявая в полученном выражении коэффициенты перед гармониками

(синусоидальными и косинусоидальными функциями) одинаковых частот в его левой и правой частях, приходим к системе из $2n$ алгебраических уравнений, где n – количество учтенных гармоник. Необходимо отметить, что точное решение требует учета бесконечного числа гармоник, что невозможно осуществить практически. В результате ограничения числа рассматриваемых гармоник точный баланс нарушается и решение становится приближенным.

Методика расчета нелинейной цепи данным способом включает в себя в общем случае следующие основные этапы.

1. Записываются уравнения состояния цепи для мгновенных значений.

2. Выбирается выражение аналитической аппроксимации заданной нелинейности.

3. На основе предварительного анализа цепи и нелинейной характеристики задается выражение искомой величины в виде конечного ряда гармоник с неизвестными на этом этапе амплитудами A_i и начальными фазами φ_i .

4. Осуществляется подстановка функций, определенных в пунктах 2 и 3, в уравнения состояния с последующей реализацией необходимых тригонометрических преобразований для выделения синусных и косинусных составляющих гармоник.

5. Производится группировка членов в полученных уравнениях по отдельным гармоникам, и на основании приравнивания коэффициентов при однопорядковых гармониках в их левых и правых частях (в отдельности для синусных и косинусных составляющих) записывается система нелинейных алгебраических (или трансцендентных) уравнений относительно искомых амплитуд A_i и начальных фаз φ_i функции разложения определяемой величины.

6. Осуществляется решение (в общем случае численными методами на ЭВМ) полученной системы уравнений относительно A_i и φ_i .

Метод эквивалентных синусоид (метод расчета по действующим значениям)

Сущность метода эквивалентных синусоид была изложена ранее при рассмотрении его графической реализации. При аналитическом варианте применения метода отсутствует основной этап графических построений, в частности векторных диаграмм, который заменяется соответствующими вычислениями с использованием аналитических соотношений для комплексов эквивалентных синусоидальных величин.

Графический вариант применения метода эквивалентных синусоид характеризуется, в первую очередь для относительно простых схем, большей наглядностью. В то же время при аналитическом подходе повышается точность расчетов за счет устранения погрешностей, связанных с графическими построениями.

Переход к эквивалентным синусоидам в сочетании с символическим методом позволяет составлять эквивалентные схемы замещения с эквивалентными параметрами $R_{\text{э}}, L_{\text{э}}$ и $C_{\text{э}}$. Трудности анализа и расчета заключаются в том, что значения этих параметров зависят от искомых напряжений, токов и потоков, т. е. заранее не известны.

Переход к эквивалентным синусоидам соответствует замене реальных петель гистерезиса $B(H)$ ($\psi(i)$) эквивалентными эллипсами. На рис. 4.22 представлен эквивалентный эллипс, заменяющий реальную кривую $B(H)$, которому соответствуют параметрические уравнения, определяемые синусоидальными функциями

$$H = H_m \sin \omega t;$$

$$B = B_m \sin(\omega t - \delta),$$

где δ – угол потерь, определяющий мощность потерь в единице объема ферромагнетика за один цикл перемагничивания

$$P_0 = \omega \frac{B_m H_m}{2} \sin \delta.$$

При переменных токах потери в стали сердечника определяются не только гистерезисом, но и вихревыми токами, вызываемыми переменным потоком. Таким образом, динамическая петля гистерезиса шире статической и отличается от последней по форме. Отметим, что для уменьшения потерь от вихревых токов сердечник набирают из изолированных тонких листов (при частоте $f = 50$ Гц их толщина $\Delta = 0,25 \dots 0,5$ мм), выполненных из сталей со специальными присадками, снижающими проводимость.

При пренебрежении неравномерностью распределения магнитной индукции по сечению мощность потерь от вихревых токов определяется соотношением

$$P_B = K_B f^2 B_m^2 G,$$

где K_B – эмпирический коэффициент, определяемый сортом стали и размером листов; G – масса сердечника.

В свою очередь мощность потерь от гистерезиса

$$P_H = K_H f B_m^n G,$$

где $n = 1,8 \dots 2,2$ (часто в первом приближении принимается $n = 2$); K_H – эмпирический коэффициент, зависящий от сорта стали.

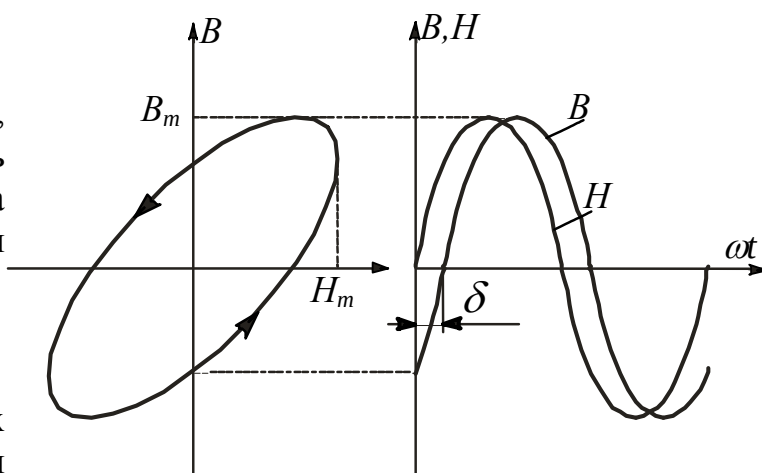


Рис. 4.22

Катушка с ферромагнитным сердечником

Нелинейная катушка индуктивности изображена на рис. 4.23. Здесь R – активное сопротивление обмотки с числом витков w ; Φ – основной поток, замыкающийся по сердечнику; Φ_S – поток рассеяния, которому

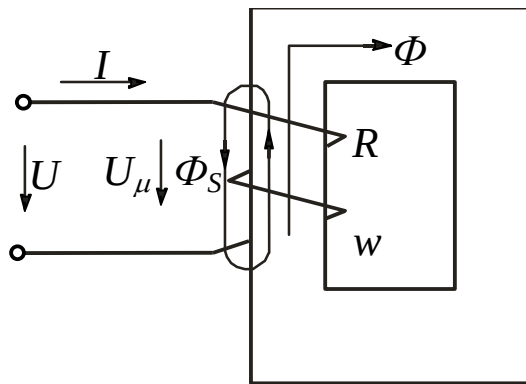


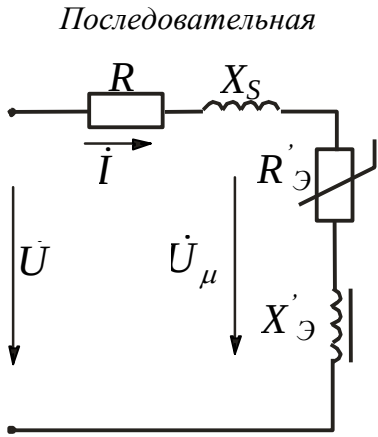
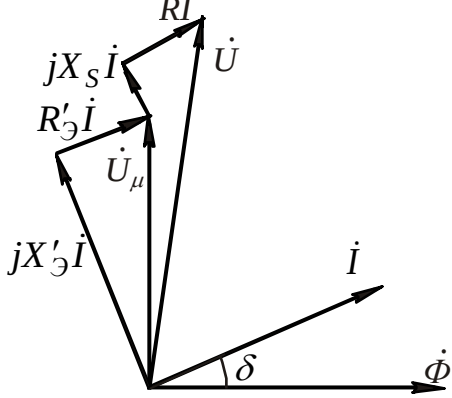
Рис. 4.23

соответствует индуктивность рассеяния L_S и индуктивное сопротивление рассеяния $X_S = \omega L_S$.

Различают параллельную и последовательную схемы замещения катушки с ферромагнитным сердечником. Эти схемы, а также соответствующие им соотношения и векторные диаграммы приведены в табл. 4.4.

Таблица 4.4. Схемы замещения, уравнения и векторные диаграммы для катушки с ферромагнитным сердечником

Схема замещения	Уравнения и соотношения для параметров	Векторная диаграмма
<i>Параллельная</i>	$\dot{U} = \dot{I}R + j\dot{I}X_S + \dot{U}_\mu,$ где $\dot{U}_\mu = j\omega w \dot{\Phi}$; $g_\varepsilon = \frac{P_{CT}}{U_\mu^2} = \frac{P_0 G}{U_\mu^2} = \frac{P_0 G}{(4,44 f w S B_m)^2};$ $b_\varepsilon = \frac{Q}{U_\mu^2} = \frac{Q_0 G}{U_\mu^2} = \frac{Q_0 G}{(4,44 f w S B_m)^2}$	

Схема замещения	Уравнения и соотношения для параметров	Векторная диаграмма
Последовательная 	$\dot{U} = \dot{I}R + \dot{I}jX_S + \dot{U}_\mu,$ где $\dot{U}_\mu = j\omega\psi\dot{\Phi}$; $R'_Э = \frac{R_Э X_Э^2}{R_Э^2 + X_Э^2};$ $X'_Э = \frac{R_Э^2 X_Э}{R_Э^2 + X_Э^2};$ $R_Э = g_Э^{-1}; X_Э = b_Э^{-1}$	

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 4.1

В схеме на рис. 4.24 $U = 120 \text{ В}$, $R = 400 \text{ Ом}$, сопротивление конденсатора для синусоидального тока $\tilde{O}_N = 100 \text{ Ом}$. ВАХ нелинейной катушки индуктивности для действующих значений приведена на рис. 4.25.

Определить действующие значения всех токов.

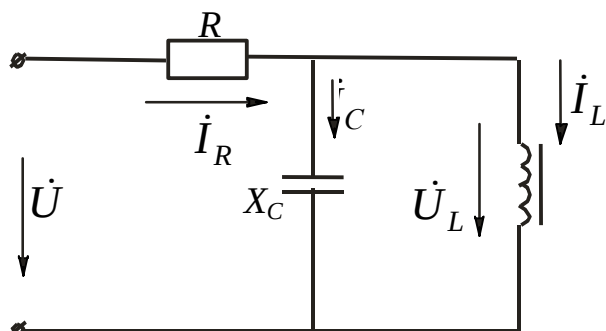


Рис. 4.24

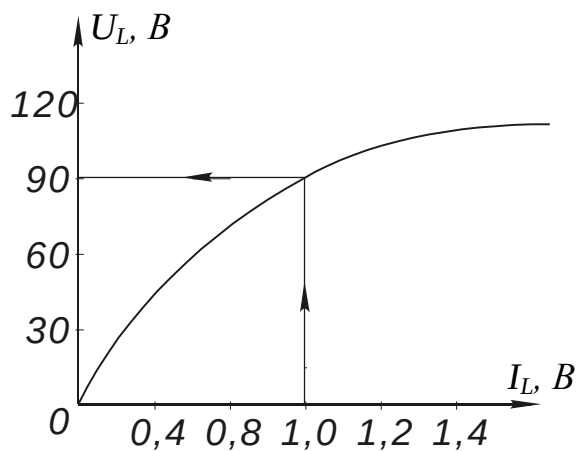


Рис. 4.25

Алгоритм решения задачи

1. Задаемся значением тока через катушку индуктивности $I_L = 1 \text{ A}$ и по ВАХ на рис. 4.25 определяем соответствующее ему значение напряжения $U_L = 90 \text{ В}$. Тогда эквивалентное сопротивление катушки индуктивности

$$X_L = \frac{U_L}{I_L} = \frac{90}{1} = 90 \hat{\Omega}.$$

2. При данном значении U_L ток через конденсатор

$$I_C = \frac{U_L}{X_C} = \frac{90}{100} = 0,9 \text{ A}$$

и ток через резистор

$$I_R = I_L - I_C = 1 - 0,9 = 0,1 \text{ A}.$$

3. Напряжение на входе цепи, соответствующее принятой величине тока I_L ,

$$U(I_L) = Z_{\hat{\Delta O}} I_R = \sqrt{R^2 + \left(\frac{X_L X_C}{X_L - X_C} \right)^2} I_R = \sqrt{400^2 + \left(\frac{90 \cdot 100}{90 - 100} \right)^2} \cdot 0,1 = 98,5 \hat{\text{A}}.$$

Далее задаемся новым значением I_L и повторяем расчет по пунктам 1–3 и т. д. При этом для повышения точности решения следует стремиться получить два близких к заданной величине U значения $U(I_L)$, одно из которых больше, а другое меньше U . Результаты заносим в табл. 4.5.

Таблица 4.5. Результаты расчета

I_L, A	$U_L, \text{В}$	$X_L, \hat{\Omega}$	I_C, A	I_R, A	$U(I_L), \text{В}$
1	90	90	0,9	0,1	98,5
1,1	97	88,2	0,97	0,13	110
1,3	105	80,8	1,05	0,25	145

4. Строим участок зависимости $U(I_L)$ (см. рис. 4.26), по которому для заданной величины U находим искомое значение $I_L = 1,16 \text{ A}$.

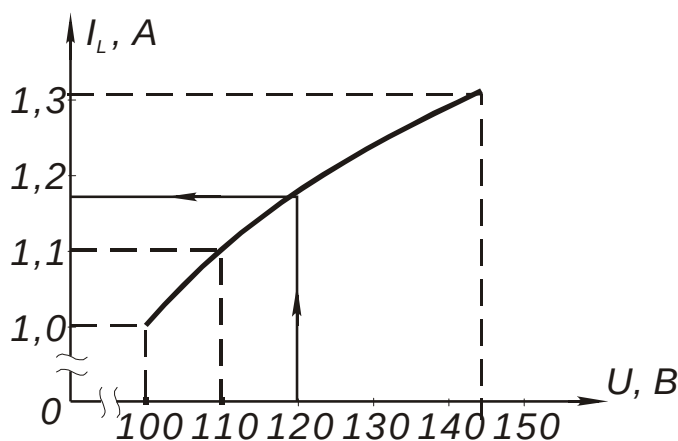


Рис. 4.26

Соответствующее ему значение напряжения на катушке $U_L = 98 \hat{\text{A}}$.

Тогда

$$I_L = \frac{U_L}{X_C} = \frac{98}{100} = 0,98 \text{ A}$$

и

$$I_R = I_L - I_C = 1,16 - 0,98 = 0,18 \text{ A}.$$

Пример 4.2

При напряжении с действующим значением $U = 200 \text{ В}$ и частотой $f = 50 \text{ Гц}$ на зажимах дросселя ток в его обмотке $I = 5 \text{ А}$, а потребляемая мощность $P = 280 \text{ Вт}$. Число витков обмотки дросселя $w = 700$, а ее активное сопротивление $R = 6 \text{ Ом}$. Измерения показали, что максимальное значение основного рабочего потока в сердечнике $\hat{O}_m = 11 \cdot 10^{-4} \text{ Вб}$.

Определить параметры всех элементов параллельной схемы замещения нелинейной катушки индуктивности.

Расчет параметров катушки выполняется в следующей последовательности.

1. Найдем напряжение, обусловленное изменением основного магнитного потока (см. табл. 4.4):

$$U_\mu = 4,44 f w \hat{O}_m = 4,44 \cdot 50 \cdot 700 \cdot 11 \cdot 10^{-4} = 171 \text{ В}.$$

2. Из выражения для потребляемой мощности

$$P = I^2 R + \frac{U_\mu^2}{R_y}$$

получаем

$$R_y = \frac{U_\mu^2}{P - I^2 R} = 224,9 \text{ Ом}.$$

3. Активная составляющая тока

$$I_a = \frac{U_\mu}{R_y} = 0,76 \text{ А};$$

реактивная составляющая тока

$$I_p = \sqrt{I^2 - I_a^2} = 4,94 \text{ А}.$$

4. По известным U_μ и I_p определяем $\tilde{O}_y$:

$$\tilde{O}_y = \frac{U_\mu}{I_p} = 34,6 \text{ Вб}.$$

5. Для комплекса входного сопротивления можно записать

$$\underline{Z} = R + jX_s + \frac{R_y jX_y}{R_y + jX_y} = 6 + jX_s + \frac{224,9 \text{ Ом} j34,6}{224,9 + j34,6} = 11,2 + j(X_s + 33,8).$$

6. Модуль входного сопротивления

$$Z = \frac{U}{I} = 40 \text{ Ом},$$

откуда реактивное сопротивление рассеяния

$$X_s = \sqrt{40^2 - 11,2^2} - 33,8 = 4,6 \text{ Ом}.$$

Пример 4.3

Катушка с железным сердечником (см. рис. 4.1), имеющим $m = 4,5 \cdot 10^3$; $S = 9 \cdot 10^{-2}$, $l = 45 \cdot 10^{-2}$, $d = 1,2 \cdot 10^{-2}$ и $w = 950$, включена на переменное напряжение $U = 127 \text{ В}$, $f = 40 \text{ Гц}$.

Пренебрегая рассеянием и потерями в железе сердечника и считая активное сопротивление обмотки равным $R = 90 \text{ Ом}$, определить потребляемый ток и активную мощность.

Решение

1. Пренебрежение потоком рассеяния и потерями в стали определяет $g_{\Sigma} = 0$ и $x_{\Sigma} = 0$. С учетом этого уравнения для нелинейной катушки приобретает вид (см. табл. 4.4)

$$\underline{U} = R \underline{I} + j \omega w \underline{\Phi}, \quad (4.1)$$

при этом

$$\underline{\Phi} = \frac{\underline{F}}{\underline{Z}_i} = \frac{w \underline{I}}{\underline{Z}_i}, \quad (4.2)$$

где $\underline{Z}_M$ – комплексное магнитное сопротивление.

2. С учетом отсутствия потерь в стали $\underline{Z}_M$ определяется как

$$\underline{Z}_i = \frac{l}{\mu_0 \mu S} + \frac{d}{\mu_0 S} = \frac{0,45}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 4,5 \cdot 10^3 \cdot 9 \cdot 10^{-2}} + \frac{1,2 \cdot 10^{-2}}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 9 \cdot 10^{-2}} = 1,15 \cdot 10^6 \text{ Гн}^{-1}.$$

3. Подставляя (4.2) в (4.1), получаем

$$\underline{U} = R \underline{I} + j \frac{\omega w^2}{\underline{Z}_i} \underline{I},$$

откуда

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{R + j \frac{\omega w^2}{\underline{Z}_i}} = \frac{127}{90 + j \frac{2\pi \cdot 40 \cdot 950^2}{1,15 \cdot 10^6}} = 0,586 e^{-j65,5^\circ} \text{ А}.$$

4. Активная мощность

$$P = I^2 R = 0,586^2 \cdot 90 = 30,9 \text{ Вт}.$$

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.....	3
УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ.....	5
ЗАДАНИЕ 1. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ.....	5
ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ К ЗАДАНИЮ 1: КЛАССИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ.....	14
Начальные условия. Законы коммутации.....	16
Корни характеристического уравнения. Постоянная времени.....	19
Способы составления характеристического уравнения.....	20
Общая методика расчета переходных процессов классическим методом.....	22
Примеры расчета переходных процессов классическим методом.....	22
1. Переходные процессы в R–L-цепи при ее подключении к источнику напряжения.....	22
2. Переходные процессы при отключении катушки индуктивности от источника питания.....	25
3. Заряд и разряд конденсатора.....	25
Переходные процессы в цепи с одним накопителем энергии и произвольным числом резисторов.....	27
Переходные процессы при подключении последовательной R–L–C-цепи к источнику напряжения.....	28
ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ.....	31
Некоторые свойства изображений.....	32
Изображения производной и интеграла.....	33
Закон Ома в операторной форме.....	33
Законы Кирхгофа в операторной форме.....	34
Переход от изображений к оригиналам.....	36
Некоторые важные замечания к формуле разложения.....	38
Последовательность расчета переходных процессов операторным методом.....	39
Формулы включения.....	40
Сведение расчета переходного процесса к расчету с нулевыми начальными условиями.....	41
МЕТОД ПЕРЕМЕННЫХ СОСТОЯНИЯ.....	42
Методика составления уравнений состояния на основе принципа наложения.....	43
ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ.....	43
ЗАДАНИЕ 2. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЦЕПЯХ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ.....	53
ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ К ЗАДАНИЮ 2: ОСНОВЫ РАСЧЕТА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЦЕПЯХ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ.....	62
РАСЧЕТ ВОЛН, ВОЗНИКАЮЩИХ ПРИ КОММУТАЦИЯХ.....	64
РАСЧЕТ ОТРАЖЕННЫХ И ПРЕЛОМЛЕННЫХ ВОЛН.....	69
ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ.....	72
ЗАДАНИЕ 3. НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ И МАГНИТНЫЕ ЦЕПИ ПРИ ПОСТОЯННЫХ ТОКАХ И МАГНИТНЫХ ПОТОКАХ.....	76
ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ К ЗАДАНИЮ 3: НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА.....	88
Параметры нелинейных резисторов.....	88
Методы расчета нелинейных электрических цепей постоянного тока.....	89
Графические методы расчета.....	89

Метод двух узлов.....	92
Расчет нелинейных цепей методом эквивалентного генератора.....	94
Аналитические методы расчета.....	96
НЕЛИНЕЙНЫЕ МАГНИТНЫЕ ЦЕПИ ПРИ ПОСТОЯННЫХ ПОТОКАХ..	101
Основные понятия и законы магнитных цепей.....	101
Характеристики ферромагнитных материалов.....	102
Магнитомягкие и магнитотвердые материалы.....	103
Статическая и дифференциальная магнитные проницаемости.....	104
Основные законы магнитных цепей.....	105
Общая характеристика задач и методов расчета магнитных цепей.....	107
Регулярные методы расчета.....	108
1. «Прямая» задача для неразветвленной магнитной цепи.....	108
2. «Прямая» задача для разветвленной магнитной цепи.....	108
Графические методы расчета.....	109
1. «Обратная» задача для неразветвленной магнитной цепи.....	110
2. «Обратная» задача для разветвленной магнитной цепи.....	110
ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ.....	113
ЗАДАНИЕ 4. НЕЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА	
В СТАЦИОНАРНЫХ РЕЖИМАХ.....	116
ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ К ЗАДАНИЮ 4: НЕЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ	
ПЕРЕМЕННОГО ТОКА В СТАЦИОНАРНЫХ РЕЖИМАХ.....	126
Особенности нелинейных цепей при переменных токах	126
Графический метод с использованием характеристик	
для мгновенных значений.....	127
Графический метод с использованием характеристик по первым	
гармоникам.....	127
Графический метод с использованием характеристик для действующих	
значений (метод эквивалентных синусоид).....	128
Аналитические методы расчета.....	130
Метод аналитической аппроксимации.....	130
Метод кусочно-линейной аппроксимации.....	131
Метод гармонического баланса.....	131
Метод эквивалентных синусоид (метод расчета по действующим	
значениям).....	132
Катушка с ферромагнитным сердечником.....	134
ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ.....	135